

Campo scalare

e' una regione di spazio dove punto per punto sia definibile una funzione

scalare (una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$) continua e derivabile ovunque

trascurando la dipendenza dal tempo e operando in coordinate cartesiane

sara' indicata di seguito come $u(x,y,z)$ (o come $U(x,y,z)$ o in altri modi)

il luogo dei punti in cui un campo scalare assume un valore costante e' detto

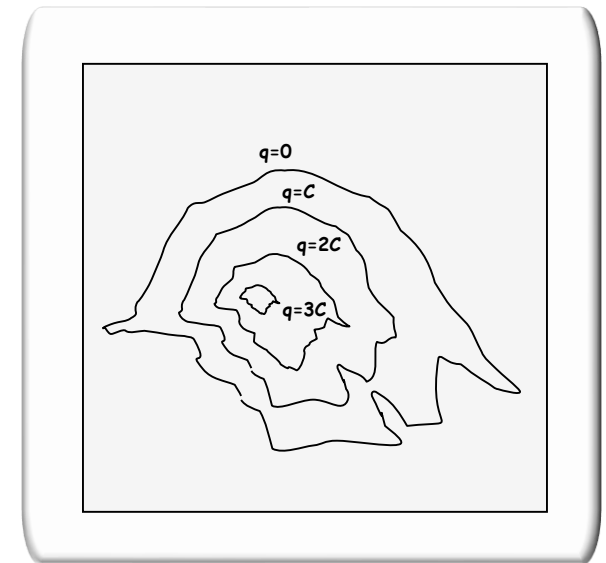
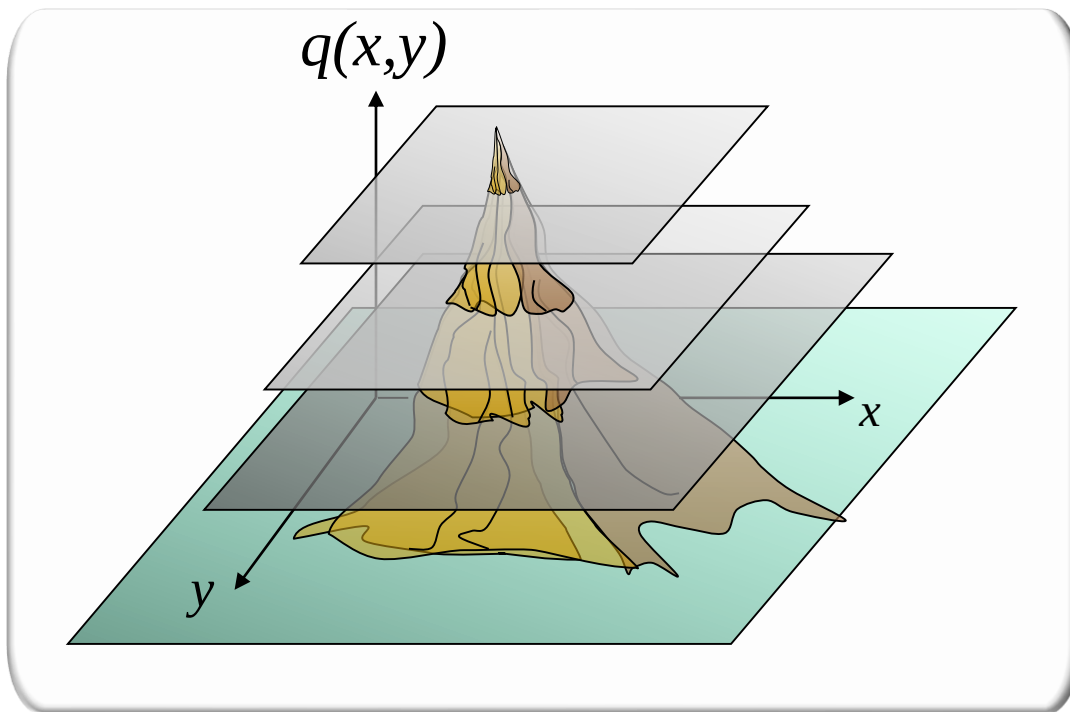
superficie di livello ed e' determinato dall' equazione $u(x,y,z) = c$

Rappresentazione grafica dei campi scalari

per rappresentare graficamente il campo scalare si considerano famiglie di curve equidistanziate $u(x,y,z) = c$, $u(x,y,z) = 2c$ etc. e si graficano le superfici corrispondenti

esempio bidimensionale: le carte topografiche

si disegna in un piano il luogo dei punti in cui la quota $q(x,y)$ sul livello del mare e' costante per valori della quota prefissati ed equidistanziati tra loro



➤ le linee si infittiscono dove la variazione di quota e' piu' rapida

Campo vettoriale

e' una regione di spazio dove sia definibile una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$

ad es. una regione di spazio dove punto per punto sia presente

una grandezza vettoriale

trascurando la dipendenza dal tempo e operando in coordinate cartesiane

un generico campo vettoriale sara' indicato di seguito come $\vec{w}(x,y,z)$

dove $\vec{w}(x,y,z) = w_x(x,y,z)\hat{i} + w_y(x,y,z)\hat{j} + w_z(x,y,z)\hat{k}$

e dove $w_x(x,y,z)$ $w_y(x,y,z)$ e $w_z(x,y,z)$

sono tre diverse funzioni scalari di x, y, z

(o come $\vec{F}(x,y,z)$ nel caso di una forza $\rightarrow$ “ campo di forza” etc.)

Rappresentazione grafica dei campi vettoriali

per rappresentare graficamente un campo vettoriali si usano le “linee di flusso”
o “linee di campo” , o “linee di forza”

le linee di flusso (o di campo o di forza) di un campo vettoriale $\vec{w}$ sono
curve continue tracciate in modo che

- la tangente alla linea di campo in ogni punto dello spazio fornisce la direzione di $\vec{w}$ in quel punto
- l'orientamento della linea e' nel verso concorde al campo vettoriale

Criterio di Faraday

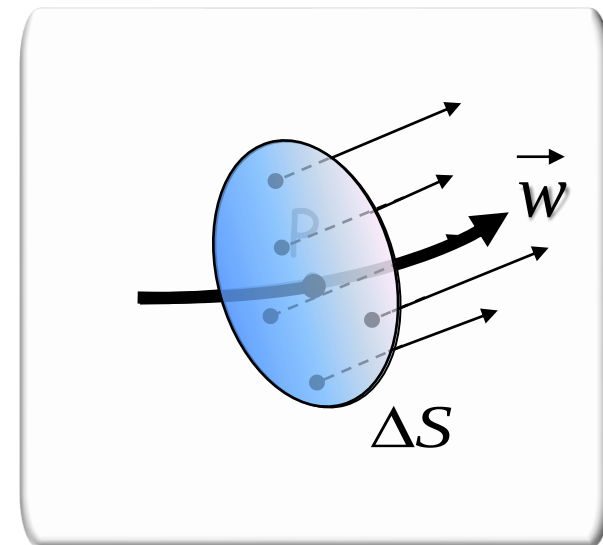
in un intorno del generico punto P si considera una piccola area ΔS perpendicolare alla direzione di $\vec{w}$

in quel punto all'interno dell'area ΔS si tracciano

linee di campo perpendicolari alla superficie e distribuite in modo

uniforme sulla superficie il numero di linee di forza ΔN da tracciare e' :

$$\Delta N = |\vec{w}(x, y, z)| \Delta S$$



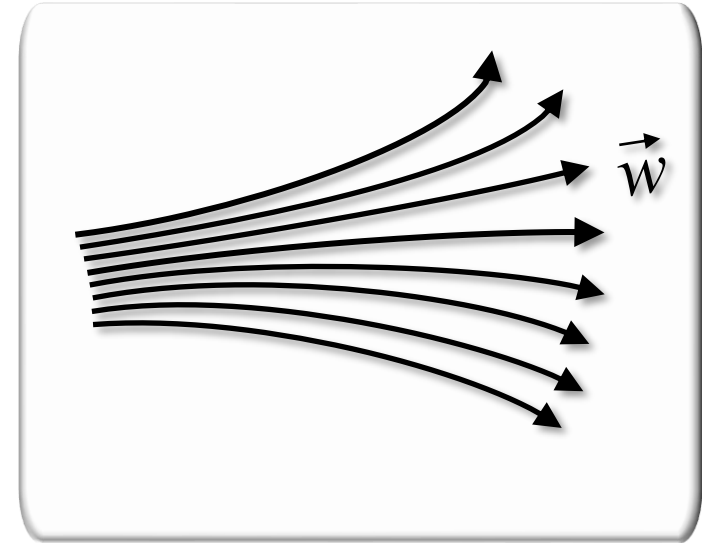
la rappresentazione del campo diviene rigorosa al limite di ΔS

tendente a zero in quanto : $dN = |\vec{w}(x, y, z)| dS \Rightarrow \frac{dN}{dS} = |\vec{w}|$

il senso del criterio e' che

la densita' superficiale di linee di campo

e' pari al **modulo del campo vettoriale**



Operatori differenziali

– Operatore "gradiente" di una funzione scalare

indicato con il simbolo $\vec{\nabla} u$ (o anche come $\text{grad}(u)$)

il gradiente di una funzione f e' definito in modo tale che.

dato un qualunque vettore $\vec{a}$ il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} u$

fornisca il valore della derivata di f nella direzione di $\vec{a}$

il gradiente applicato ad un campo scalare $u(x,y,z,t)$

produce in un campo vettoriale di $\mathbb{R}^n$

Gradiente di un campo scalare in coordinate cartesiane

formalmente l'operatore gradiente in coordinate cartesiane si indica come

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{k}$$

in coordinate cartesiane il *gradiente* del campo scalare $u(x,y,z)$ e'

$$\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

se a partire dal punto di coordinate x, y, z si fa uno spostamento infinitesimo

in una direzione qualsiasi $\Rightarrow d\vec{l} = dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}$

la variazione del campo sarà $\Delta u \cong du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$

applicando l'operatore gradiente al campo $u(x,y,z)$

si ha $\vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$

è evidente che

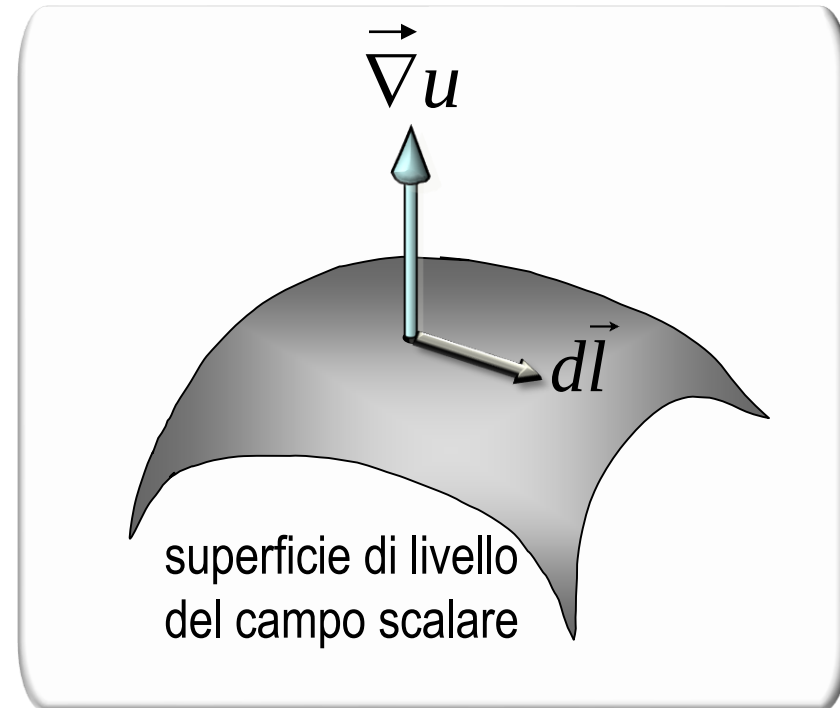
$$du = \vec{\nabla} u \cdot d\vec{l}$$

Direzione del gradiente

il luogo dei punti in cui il campo scalare e' costante, $u(x,y,z) = c$,
e' una superficie detta **superficie di livello**

se ci si muove di un tratto infinitesimo $d\vec{l}$ **lungo** la superficie di livello
il campo non varia e $\Delta u = du = 0$

da $du = \vec{\nabla} u \cdot d\vec{l} \rightarrow$ la **direzione**
del gradiente e' quella **perpendicolare**
alla superfici di livello del campo scalare



il gradiente e' un vettore e fornisce la rapidita' di variazione del campo scalare
lungo la direzione ed il verso in cui si ha la maggior variazione del campo

il modulo del gradiente e'

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

dato un campo scalare $u(x,y,z)$ e' **sempre** possibile ricavare
un campo vettoriale attraverso l'operatore gradiente

ma

dato un generico campo vettoriale $\vec{w}(x,y,z)$ **non e' sempre**
possibile trovare un campo scalare collegato a $\vec{w}$ tramite l'operatore gradiente
i campi vettoriali ricavabili da un campo scalare attraverso l'operatore gradiente
sono detti **conservativi**

Attenzione: conservativo **non** significa costante nel tempo

Integrale di linea di un campo vettoriale

dati due punti A e B e una linea orientata Γ si definisce

integrale di linea del campo vettoriale $\vec{w}$ lungo Γ

$$\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

lungo la linea Γ

es. : integrale di linea della forza gravitazionale tra il sole e un pianeta calcolato tra un punto A ed un punto B lungo un percorso Γ qualsiasi

$$\vec{G} = -\gamma \frac{m_s m_p}{r^2} \hat{u}_r \quad \text{dove} \quad m_s = \text{massa del sole} \quad m_p = \text{massa del pianeta}$$

$\gamma = \text{costante di gravitazione universale}$

$$\int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\gamma \frac{m_s m_p}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{l} = ?$$

lungo Γ

attenzione: la forza gravitazionale esercitata dal sole sul pianeta non e' costante nello spazio ne' come **intensita'**, ne' come **direzione**, ne' come **verso**

➤ per calcolare l'integrale di linea si dovra' innanzitutto suddividere il percorso in spostamenti molto piccoli $\Delta \vec{l}_i$ (al limite in spostamenti infinitesimi $d\vec{l}_i$) orientati lungo la linea Γ prescelta

per ogni spostamento infinitesimo lungo Γ si dovrà calcolare il **prodotto scalare** della forza di gravità $\vec{G}$ per il vettore spostamento infinitesimo $d\vec{l}_i$

→ assumendo che la forza sia costante lungo tutto lo spostamento infinitesimo $d\vec{l}_i$

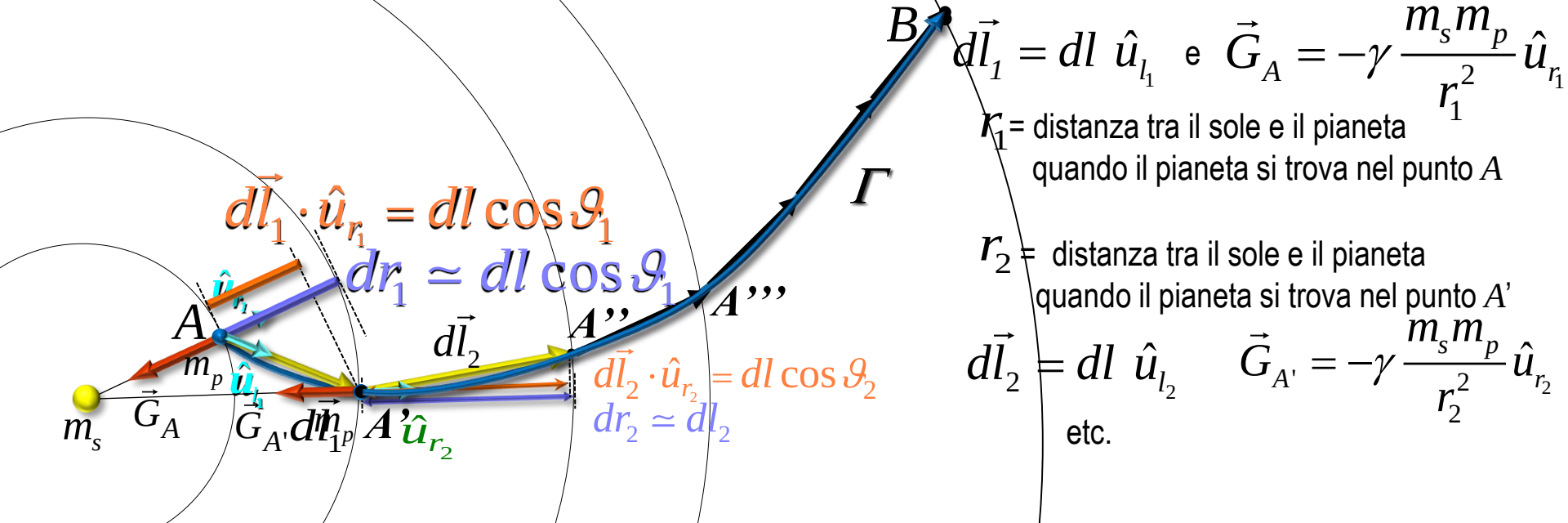
Nota Bene: all'integrale di linea di un campo di forza si dà il nome di lavoro L

$$L = \int_{\Gamma} dL = \int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{l}$$

Nota Bene : senza perdere di generalità possiamo assumere che gli spostamenti infinitesimi abbiano tutti lo stesso modulo

ossia la stessa lunghezza dl ma direzione e verso diversi tra loro

$$d\vec{l}_1 = dl \hat{u}_{l_1} \quad d\vec{l}_2 = dl \hat{u}_{l_2} \quad \text{etc.} \quad \Rightarrow \quad \left| d\vec{l}_i \right| = dl \quad \forall i$$



$$dL_1 = \vec{G}_A \cdot d\vec{l}_1 = -\gamma \frac{m_s m_p}{r_1^2} \hat{u}_{r_1} \cdot dl \hat{u}_{l_1} = -\gamma \frac{m_s m_p}{r_1^2} dl \cos \vartheta_1 \approx -\gamma \frac{m_s m_p}{r_1^2} dr_1$$

$$dL_2 = \vec{G}_{A'} \cdot d\vec{l}_2 = -\gamma \frac{m_s m_p}{r_2^2} \hat{u}_{r_2} \cdot dl \hat{u}_{l_2} \Rightarrow dL_2 \approx -\gamma \frac{m_s m_p}{r_2^2} dr_2$$

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\gamma \frac{m_s m_p}{r^2} dr = -\gamma m_s m_p \int_A^B \frac{dr}{r^2} = (-\gamma m_s m_p) \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{\gamma m_s m_p}{r} \Big|_{r_A}^{r_B} \quad \text{dunque} \quad L_{A \rightarrow B} = \gamma \frac{m_s m_p}{r_B} - \gamma \frac{m_s m_p}{r_A}$$

Circuitazione di un campo vettoriale

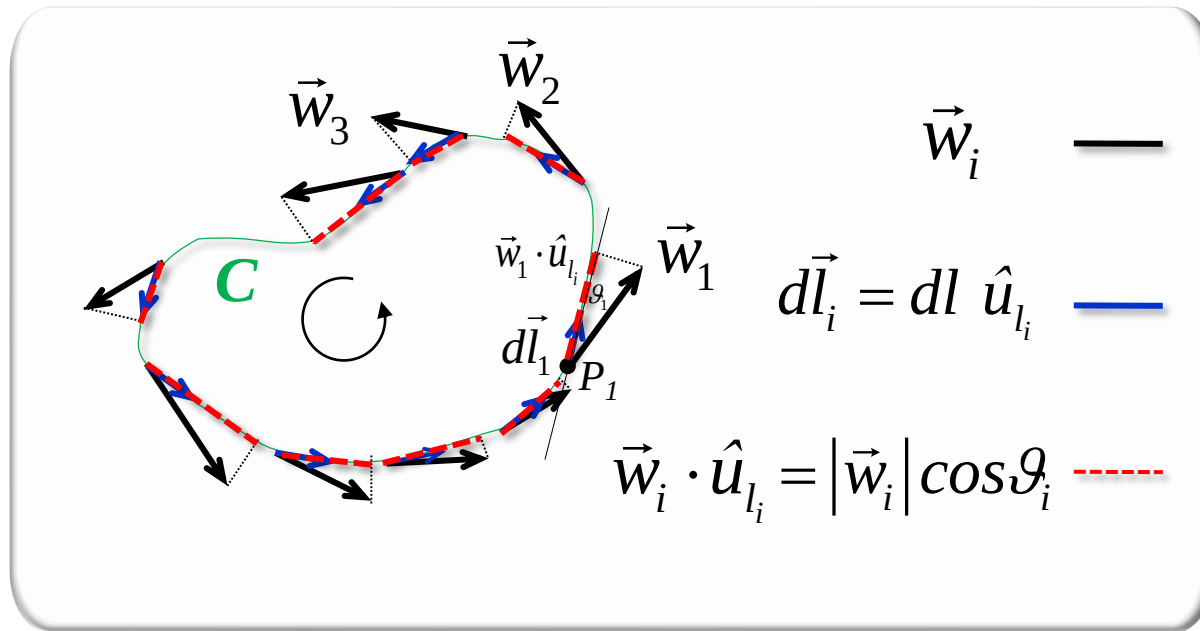
se la linea e' chiusa si parla della *circuitazione* di $\vec{w}$ lungo il circuito C

$$\Gamma_C(\vec{w}) = \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

significato fisico della circuitazione:

la circuitazione di un campo vettoriale segnala la tendenza
ad “incurvarsi” delle linee di campo di un campo vettoriale
in un punto dello spazio

Esempio # 1

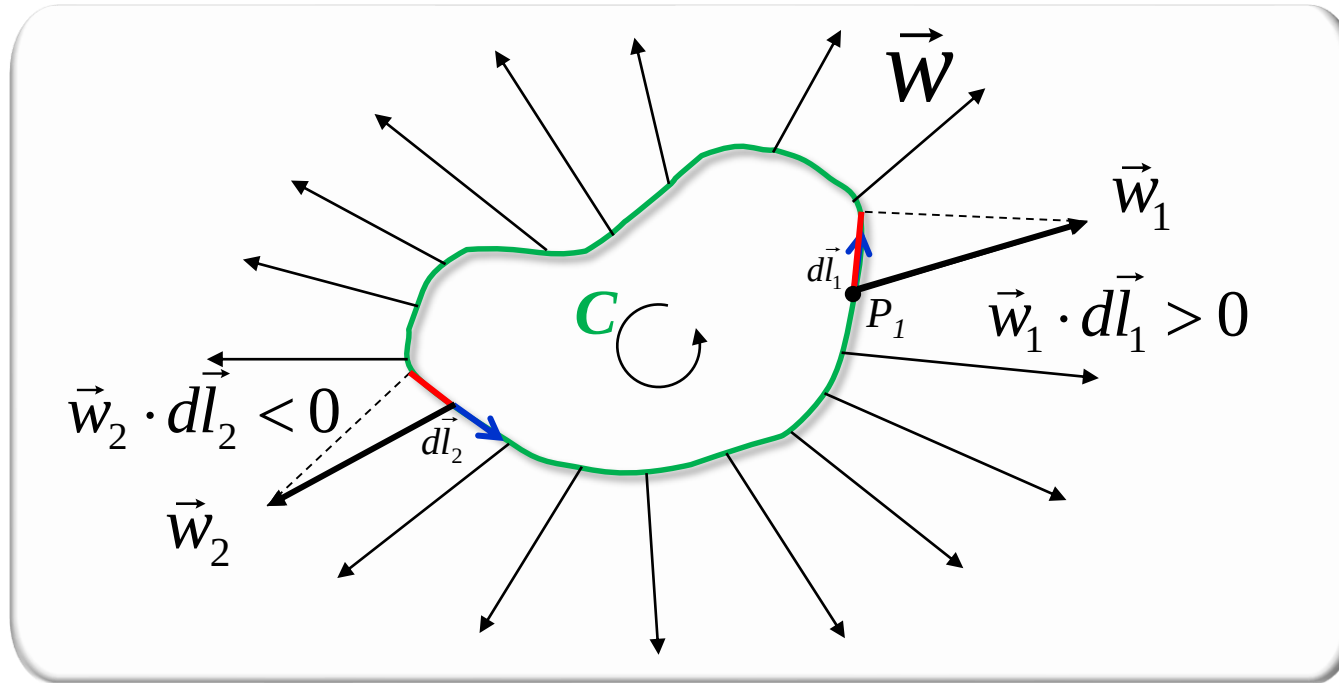


tutti i prodotti scalari $\vec{w}_i \cdot \hat{u}_{l_i}$ ossia le proiezioni di $\vec{w}$ lungo la linea chiusa e orientata C sono concordi in segno in particolare in questo caso

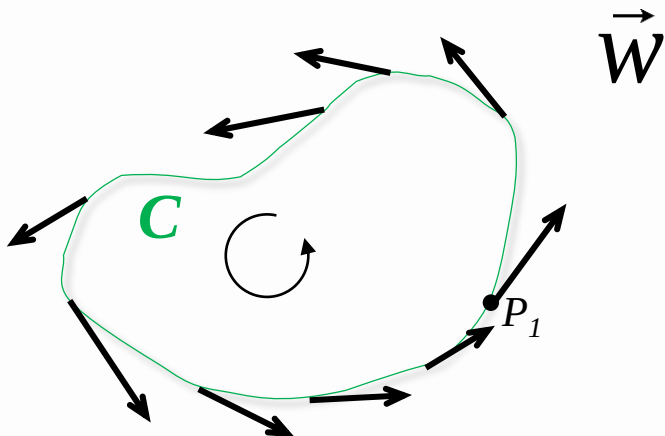
gli angoli θ_i sono tutti $< 90^\circ \rightarrow$ tutti i $\cos \theta_i > 0 \rightarrow$ tutti i $\vec{w}_i \cdot d\vec{l}_i$ saranno > 0

e la circuitazione di $\vec{w}$ lungo il circuito C in questo caso risulterà positiva

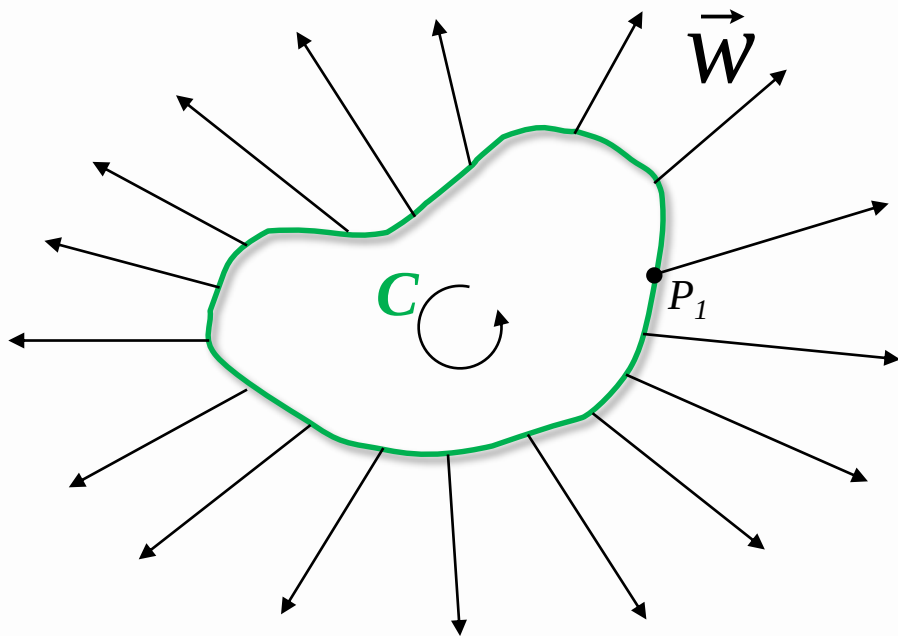
Esempio # 2



in questo caso alcuni prodotti scalari saranno positivi mentre altri forniranno un contributo negativo quindi la circuitazione di $\vec{w}$ lungo il circuito C potrebbe risultare positiva, negativa o nulla



il campo ha una tendenza globale ad incurvarsi , ossia a "seguire" la linea C



il campo non ha una tendenza globale a "seguire" la linea C , piuttosto ha tendenza ad "**irraggiarsi**" da un punto, ossia ad avere un andamento "radiale"

Rotore di un campo vettoriale

l'operatore $rot(\vec{w}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{w}$ e' detto **rotore** del campo vettoriale $\vec{w}$

l'operatore rotore opera su di un campo **vettoriale** e fornisce un **vettore**

in coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla} \times \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{w} \right)_x = \frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{w} \right)_y = \frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{w} \right)_z = \frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}$$

sviluppo del determinante con la regola di Sarrus (Cramer)

$$\vec{\nabla} \times \vec{w}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

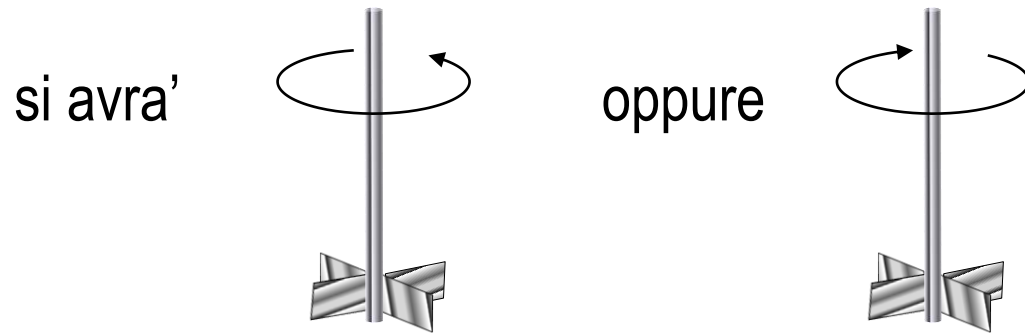
$$\vec{a} \times \vec{b}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

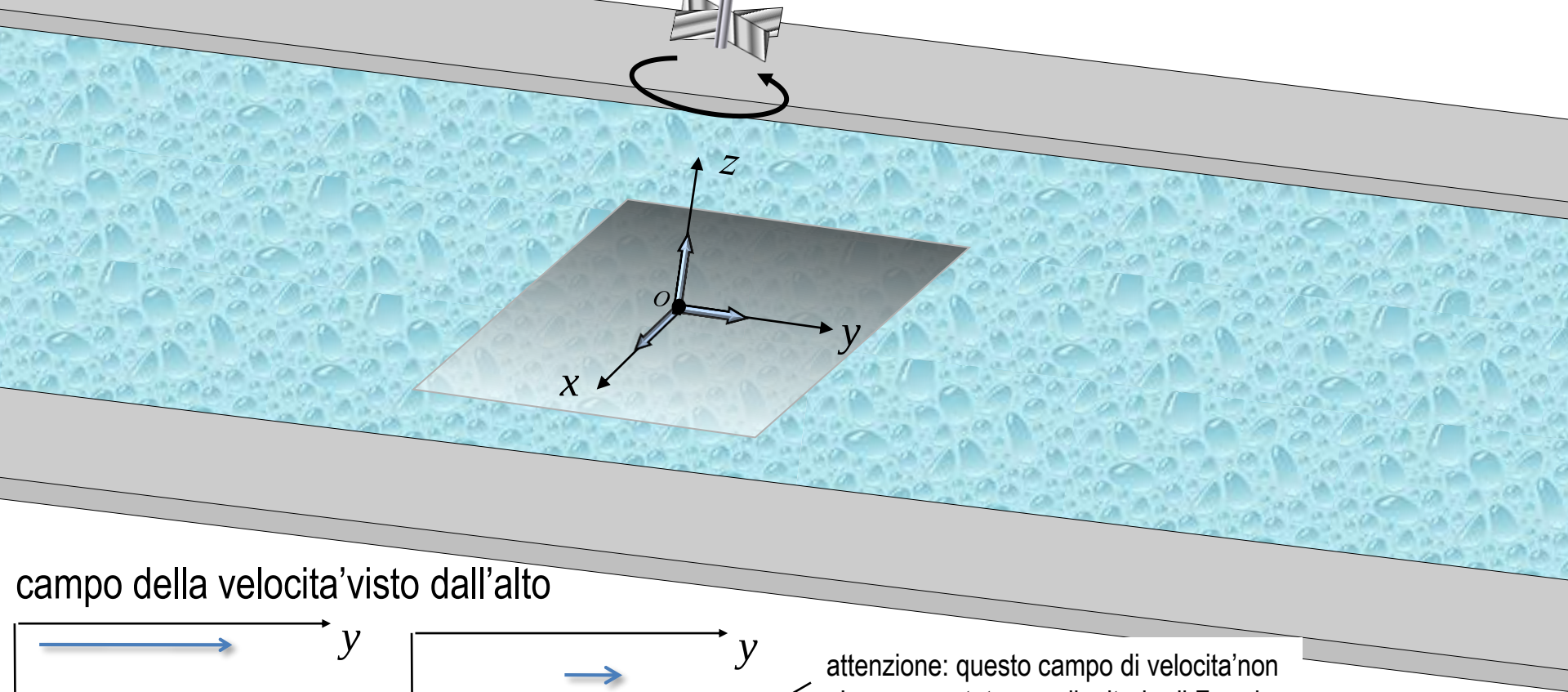
se il rotore di $\vec{w}$ e' **nullo** il campo e' detto "irrotazionale" o "conservativo"

Significato fisico dell'operatore rotore

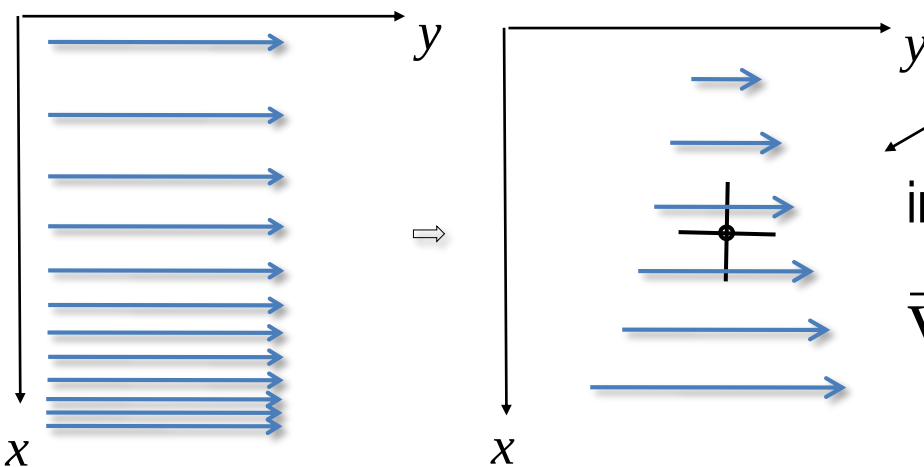
supponiamo di disporre di un mulinello costituito da quattro palette perpendicolari tra loro in grado di ruotare rispetto ad un asse centrale



utilizzeremo questo strumento per misurare la tendenza ad “*incurvarsi*” di un campo vettoriale in un determinato punto dello spazio
concettualmente poi ridurremo le dimensioni del mulinello a zero
ottenendo, al limite, le proprietà del campo nell’intorno infinitesimo di un punto



campo della velocità visto dall'alto



attenzione: questo campo di velocità non è rappresentato con il criterio di Faraday

in questo caso

$$\vec{v}(x, y, z) = 0\hat{i} + v_y(x)\hat{j} + 0\hat{k}$$

più in generale si può avere

$$\vec{v}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\hat{i} + v_y(x, y, z)\hat{j} + v_z(x, y, z)\hat{k}$$

dato che l'intensità di $\mathbf{v}_y$, ossia della componente y del campo di velocità, aumenta all'aumentare della coordinata x la derivata parziale della componente

$\mathbf{v}_y$ del campo aumenterà in funzione di x

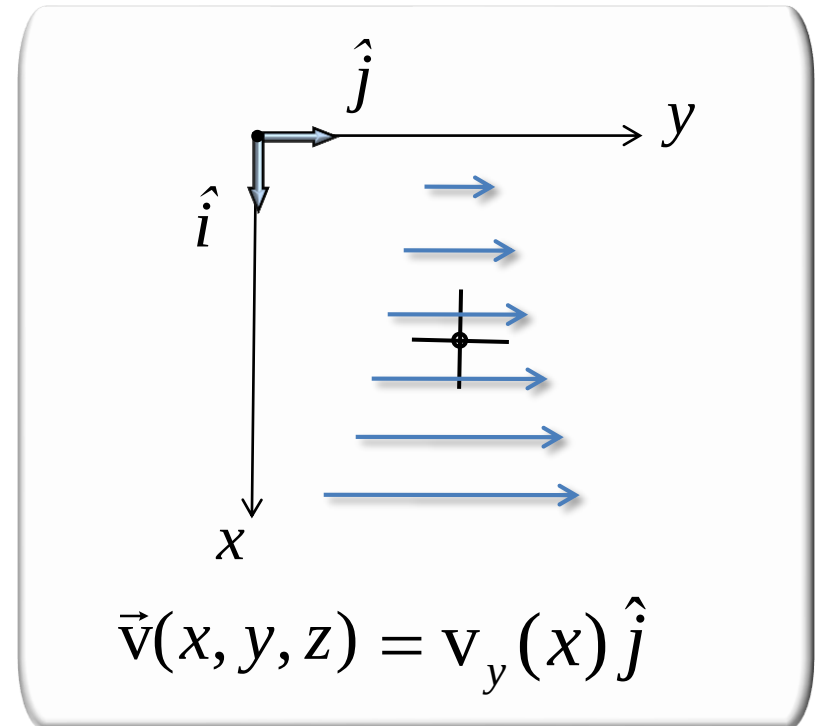
quindi
$$\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x} > 0$$

Nota bene:

in questo particolare esempio

$$\vec{\mathbf{v}}(x, y, z) = v_y(x) \hat{j}$$

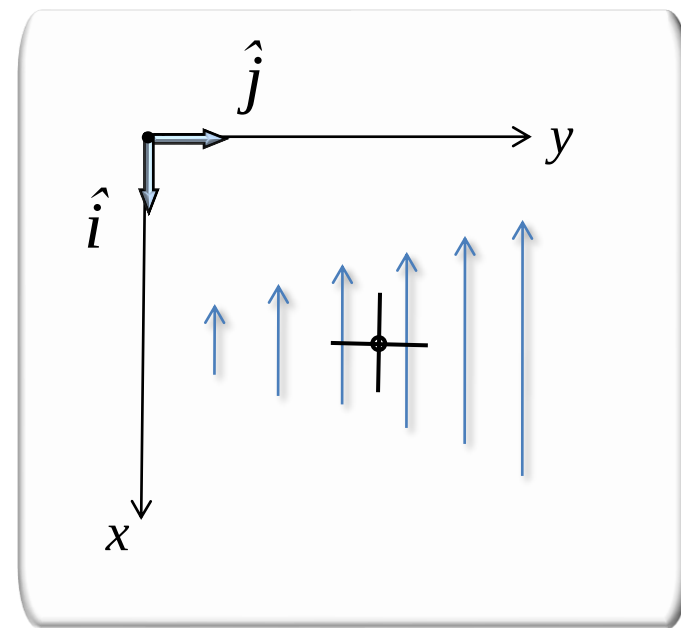
perciò
$$\frac{\partial \mathbf{v}_y}{\partial x} \equiv \frac{d\mathbf{v}_y}{dx}$$



da notare che lo stesso effetto si otterrebbe

anche se l'andamento del campo vettoriale fosse

come nella figura qui a lato



in questo caso $\vec{v}(x, y, z) = -v_x(y)\hat{i}$

dato che la componente v_x e' negativa

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} < 0$$

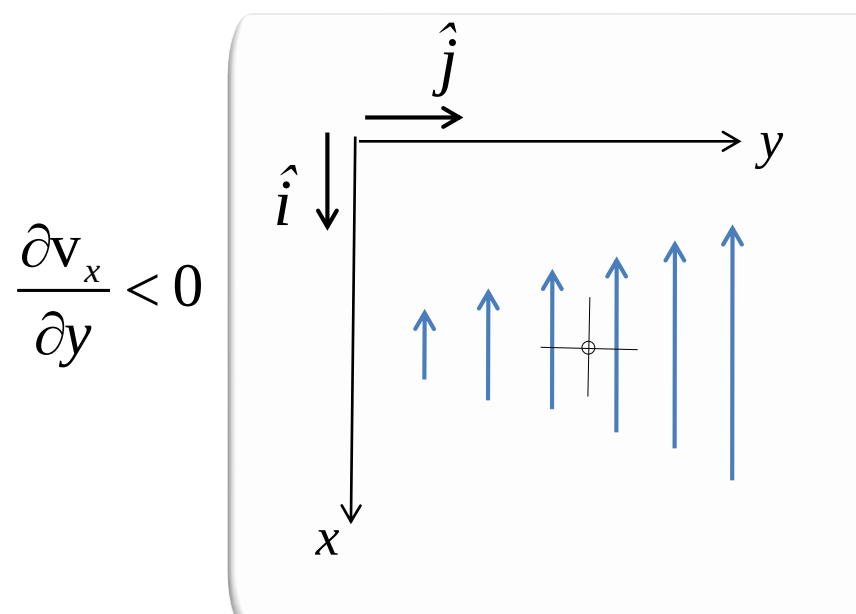
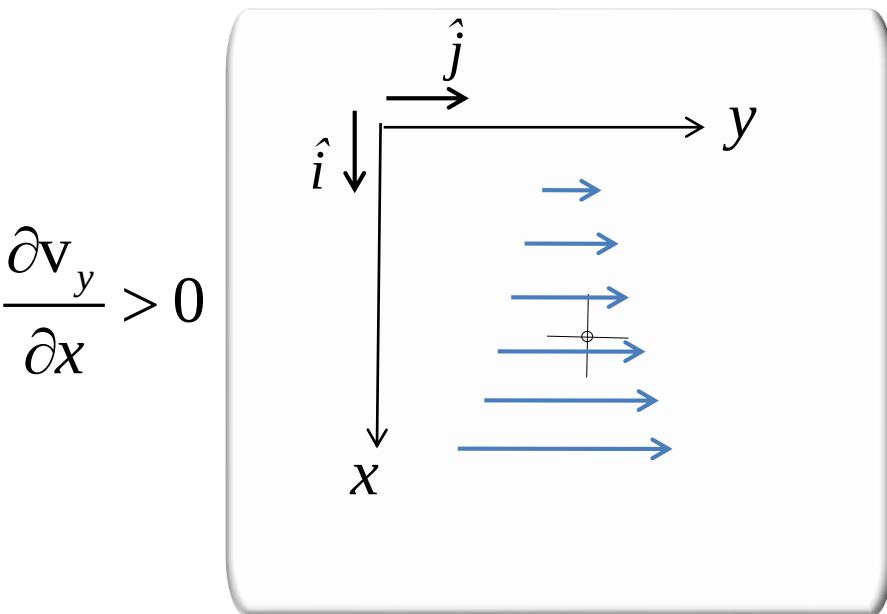
In conclusione: si può avere rotazione antioraria (vista dall'alto) attorno all'asse z

sia se $\frac{\partial v_y}{\partial x} > 0$ sia se $\frac{\partial v_x}{\partial y} < 0$ e l'entità della rotazione

ossia l'effetto complessivo dipenderà dalla somma di questi due contributi, ma

dato che $\frac{\partial v_x}{\partial y} < 0$ bisogna in realtà sommare l'opposto di $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ a $\frac{\partial v_y}{\partial x}$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} + \left(-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \equiv (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z$$



dalla definizione di rotore in coordinate cartesiane

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

si deduce che in questo caso la componente z del rotore sarà

maggiore di zero segnalando la curvatura del campo lungo questo asse

attenzione:

il rotore esprime la tendenza di un campo vettoriale ad assumere una curvatura

nell'intorno infinitesimo di un punto dello spazio, ma questo

non significa necessariamente che il campo ruoti in quel punto

Conservativita' di un campo vettoriale

vi sono una serie di definizioni di “**conservativita'**” di un campo vettoriale tutte tra loro equivalenti un campo vettoriale e' conservativo

- se l'integrale di linea del campo vettoriale calcolato lungo un percorso qualsiasi non dipende dal percorso, ma solo dalle coordinate degli estremi di partenza e di arrivo
- se la circuitazione del campo e' nulla

- se esiste una funzione scalare della posizione nello spazio, ossia una $u(x,y,z)$ (ed eventualmente anche del tempo), tale per cui l'integrale di linea tra due punti P_1 e P_2 calcolato lungo un percorso qualsiasi e' uguale sempre e soltanto alla differenza che la funzione u assume nei punti P_1 e P_2
- se il rotore del campo e' nullo

Divergenza di un campo vettoriale

l'operatore $div(\vec{w}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{w}$

e' detto **divergenza** del campo vettoriale $\vec{w}$

l'operatore divergenza opera su di un campo **vettoriale** e fornisce uno **scalare** in coordinate cartesiane se :

$$\vec{w} = w_x(x, y, z)\hat{i} + w_y(x, y, z)\hat{j} + w_z(x, y, z)\hat{k}$$

la divergenza di $\vec{w}$ e'

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Backup slides