Esercizio: moto verticale di un corpo

un corpo lasciato libero di cadere sulla terra si muove verso il basso con

accelerazione costante, diretta verso il suolo e di modulo $g = 9.8$ ms^{-2}

determinare il moto del corpo nei casi di

1) caduta da altezza h con velocita' iniziale nulla,

2) caduta da altezza h con velocita' iniziale v_1 rivolta verso il basso,

3) lancio dal suolo con velocita' iniziale v_2 rivolta verso l'alto

assunto un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x diretto verso l'alto

e origine al suolo $\vec{a} = g(-\hat{i}) = -g\hat{i}$

secondo le informazioni del testo, anche la velocita' avra' solo

componenti lungo l'asse x quindi il problema e' unidimensionale

e la traiettoria e' una retta l'accelerazione e' costante quindi si trattera'

di un moto **rettilineo uniformemente accelerato** (o per meglio dire **decelerato**)

1) caduta da altezza h con velocita' iniziale nulla:

in generale nel moto ***rettilineo uniformemente accelerato*** si ha:

$$\mathrm{v}(t) = at + \mathrm{v}_0 \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t + x_0$$

in questo caso particolare le condizioni iniziali del moto, per $t = t_0 = 0$ sono

$$x_0 = h \qquad \mathrm{v}_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_0 = -g$$

imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$$\mathrm{v}(t) = -gt \quad \text{e} \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

chiaramente il moto si concludera' quando il corpo tocca il suolo in $x = 0$

da $\mathrm{v}(t) = -gt$ e $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ otteniamo la dipendenza

del tempo dallo spazio $t(x) = \sqrt{\frac{2(h - x(t))}{g}}$

il corpo tocchera' il suolo nel punto $x = 0$ quindi il tempo di caduta t_c si otterra'

ponendo $x = 0$ e la velocita' con cui il corpo tocca il suolo sara' $\mathrm{v}_c = \mathrm{v}(t = t_c)$

$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ⇨ $\mathrm{v}_c = -g\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ossia $\mathrm{v}_c = -\sqrt{2gh}$

ovvero $\vec{\mathrm{v}}_c = -\sqrt{2gh}\ \hat{i}$

2) caduta da altezza h con velocita' iniziale v_1 rivolta verso il basso:

le equazioni orarie saranno sempre quelle del moto ***rettilineo uniformemente accelerato,*** ossia $\mathrm{v}(t) = at + \mathrm{v}_0$ e $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + \mathrm{v}_0 t + x_0$

ma in questo caso particolare le condizioni iniziali del moto, per $t = t_0 = 0$

sono $x_0 = h$ $\mathrm{v}_0 = -\mathrm{v}_1$ e $a_0 = -g$

imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$$\mathrm{v}(t) = -gt - \mathrm{v}_1 \quad \text{e} \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - \mathrm{v}_1 t + h$$

risolvendo per t si ha $$t(x) = \frac{-\mathrm{v}_1 + \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + 2g(h - x(t))}}{g}$$

ovviamente la soluzione negativa e' da scartare il tempo di caduta t_c si otterra' ponendo $x = 0$ $$t_c = \frac{-\mathrm{v}_1 + \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + 2gh}}{g}$$

t_c risulta minore che nel caso precedente quando si aveva $$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

sostituendo questo valore nella equazione oraria della velocita' $\mathrm{v}(t) = -gt - \mathrm{v}_1$

si ricava la velocita' del corpo nel momento in cui tocca il suolo :

$$\mathrm{v}_c = -g\,\frac{-\mathrm{v}_1 + \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + 2gh}}{g} - \mathrm{v}_1$$

da cui $$\mathrm{v}_c = -\sqrt{\mathrm{v}_1^2 + 2gh}$$

v_c e' maggiore che nel caso precedente quando si aveva $$\mathrm{v}_c = -\sqrt{2gh}$$

3) lancio dal suolo con velocita' iniziale v_2 rivolta verso l'alto

le equazioni orarie saranno sempre le stesse

$$v(t) = at + v_0 \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

ma le condizioni iniziali del moto, per $t = t_0 = 0$ sono

$x_0 = 0 \quad v_0 = +v_2 \quad$ e $\quad a_0 = -g$ imponendo queste condizioni iniziali

$$v(t) = -gt + v_2 \quad \text{e} \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t$$

il corpo inizialmente sale verso l'alto con moto uniformemente decelerato e quindi arrivera' a fermarsi al tempo t_m ossia avra' velocita' nulla al tempo t_m

$$t_m = \frac{v_2}{g}$$

e nel momento in cui si fermera' avra' raggiunto la posizione $\quad x_m = \dfrac{v_2^2}{2g}$

dal tempo $t > t_m$ in avanti si riproduce la situazione del primo caso ossia

caduta con velocita' iniziale nulla

questa volta pero' il corpo cade da una altezza x_m non piu' da h

calcolando t_c riesce $t_c = \sqrt{\frac{2x_m}{g}}$

sostituendo il valore ottenuto per x_m $t_c = \frac{\mathrm{v}_2}{g}$ dunque $t_c = t_m$

la durata complessiva del moto e'

$$t_c + t_m = 2t_m = \frac{2\mathrm{v}_2}{g}$$

Backup Slides