

Esercizio: moto verticale di un corpo

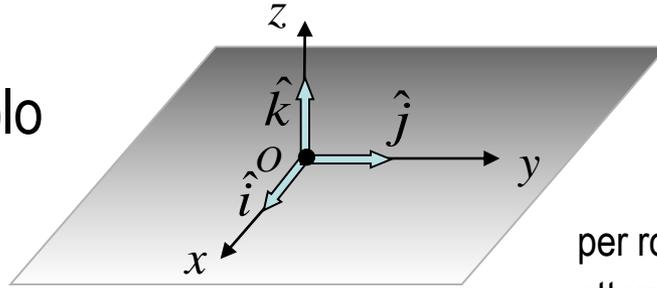
un corpo lasciato libero di cadere sulla terra si muove verso il basso con accelerazione costante, diretta verso il suolo e di modulo $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$

determinare il moto del corpo nei casi di

- 1) caduta da altezza h con velocità iniziale nulla,
- 2) caduta da altezza h con velocità iniziale v_1 rivolta verso il basso,
- 3) lancio dal suolo con velocità iniziale v_2 rivolta verso l'alto

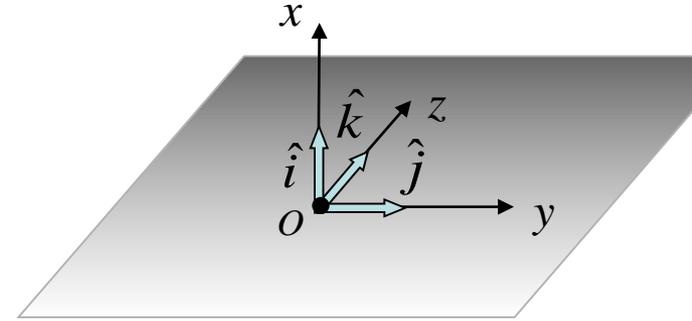
assunto un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x diretto verso l'alto

e origine al suolo



\Rightarrow

per rotazione
attorno all'asse y



$$\vec{a} = g(-\hat{i}) = -g\hat{i}$$

secondo le informazioni del testo, anche la velocità avrà solo

componenti lungo l'asse x quindi il problema è unidimensionale

e la traiettoria è una retta l'accelerazione è costante quindi si tratterà

di un moto **rettilineo uniformemente accelerato** (o per meglio dire **decelerato**)

1) caduta da altezza h con velocità iniziale nulla:

in generale nel moto **rettilineo uniformemente accelerato** si ha:

$$v(t) = at + v_0 \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

in questo caso particolare le condizioni iniziali del moto, per $t = t_0 = 0$ sono

$$x_0 = h \quad v_0 = 0 \quad \text{e} \quad a_0 = -g$$

imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$$v(t) = -gt \quad \text{e} \quad x(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + h$$

chiaramente il moto si concluderà quando il corpo tocca il suolo in $x = 0$

in questo caso

le equazioni orarie per la posizione, la velocità e l'accelerazione sono note

la traiettoria del moto è nota, le posizioni iniziale e finale sono note

ed è nota la velocità iniziale cosa altro occorre per descrivere il moto ?

risp. : la durata del fenomeno , ossia il tempo di caduta, e la velocità finale

dunque sfrutteremo le equazioni orarie per determinarli

da $v(t) = -gt$ e $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ otteniamo la dipendenza

del tempo dallo spazio $t(x) = \sqrt{\frac{2(h - x(t))}{g}}$

il corpo toccherà il suolo nel punto $x = 0$ quindi il tempo di caduta t_c si otterrà ponendo $x = 0$ e la velocità con cui il corpo tocca il suolo sarà $v_c = v(t = t_c)$

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad v_c = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \text{ossia} \quad v_c = -\sqrt{2gh}$$

ovvero $\vec{v}_c = -\sqrt{2gh} \hat{i}$

2) caduta da altezza h con velocità iniziale v_1 rivolta verso il basso:

le equazioni orarie saranno sempre quelle del moto **rettilineo uniformemente**

accelerato, ossia $v(t) = at + v_0$ e $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$

ma in questo caso particolare le condizioni iniziali del moto, per $t = t_0 = 0$

sono $x_0 = h$ $v_0 = -v_1$ e $a_0 = -g$

imponendo queste condizioni iniziali si ottiene

$v(t) = -gt - v_1$ e $x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - v_1t + h$

risolvendo per t si ha $t(x) = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2g(h - x(t))}}{g}$

ovviamente la soluzione negativa è da scartare

il tempo di caduta t_c si otterra' ponendo $x = 0$ $t_c = \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g}$

t_c risulta minore che nel caso precedente quando si aveva $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

sostituendo questo valore nella equazione oraria della velocita' $v(t) = -gt - v_1$

si ricava la velocita' del corpo nel momento in cui tocca il suolo :

$$v_c = -g \frac{-v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gh}}{g} - v_1$$

da cui
$$v_c = -\sqrt{v_1^2 + 2gh}$$

v_c e' maggiore che nel caso precedente quando si aveva $v_c = -\sqrt{2gh}$

3) lancio dal suolo con velocità iniziale v_2 rivolta verso l'alto

le equazioni orarie saranno sempre le stesse

$$v(t) = at + v_0 \quad \text{e} \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

ma le condizioni iniziali del moto, per $t = t_0 = 0$ sono

$x_0 = 0$ $v_0 = +v_2$ e $a_0 = -g$ imponendo queste condizioni iniziali

$$v(t) = -gt + v_2 \quad \text{e} \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2t$$

il corpo inizialmente sale verso l'alto con moto uniformemente decelerato e quindi arriverà a fermarsi al tempo t_m ossia avrà velocità nulla al tempo t_m

$$t_m = \frac{v_2}{g}$$

e nel momento in cui si fermerà avrà raggiunto la posizione $x_m = \frac{v_2^2}{2g}$

dal tempo $t > t_m$ in avanti si riproduce la situazione del primo caso ossia caduta con velocità iniziale nulla

questa volta però il corpo cade da una altezza x_m non più da h

calcolando t_c riesce $t_c = \sqrt{\frac{2x_m}{g}}$

sostituendo il valore ottenuto per x_m $t_c = \frac{v_2}{g}$ dunque $t_c = t_m$

la durata complessiva del moto è

$$t_c + t_m = 2t_m = \frac{2v_2}{g}$$

Backup Slides