Curve piane

una curva piana, per es. appartenente al piano xy , puo' essere espressa

in forma cartesiana ⇨ $f(x, y) = 0$ $f : I \to \mathbb{R}^2$

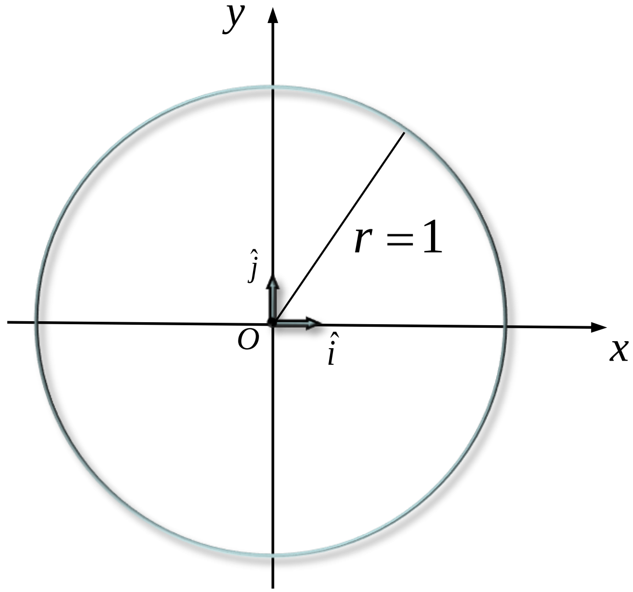
dove $f(x,y)$ e' una funzione reale continua con derivate parziali continue

oppure in forma parametrica ⇨
$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

dove $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni reali della variabile reale (parametro) t

definito in un dato intervallo $[a,b]$ di $\mathbb{R}$

es. circonferenza unitaria



espressione in forma cartesiana

$$f(x,y)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-1=0$$

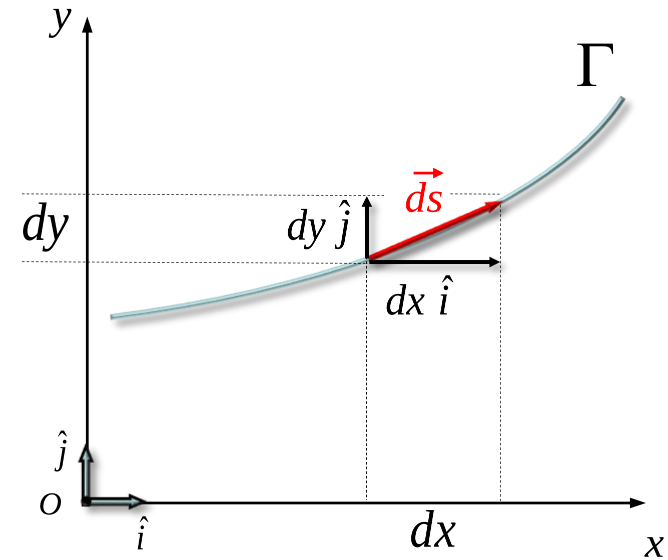
espressione in forma parametrica

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= cos(t) \\ y &= sen(t) \end{aligned} \qquad con \;\; t\in[0,2\pi]$$

Curve piane

data una curva Γ giacente nel piano xy se si effettua uno spostamento

infinitesimo $d\vec{s}$ **lungo** Γ



$\Rightarrow$ $$d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$$

e $$\left|d\vec{s}\right| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

ds e' la " *lunghezza dell'arco elementare* "

se la curva ha l'espressione parametrica

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad con \;\; t \in [a,b]$$

e se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni **continue** e **derivabili**

$$dx = x'(t)dt \quad \text{e} \quad dy = y'(t)dt$$

o anche $dx = \dot{x}dt$ e $dy = \dot{y}dt$ dove $\dot{x} = x'(t) = \frac{dx}{dt}$ etc.

$$\Rightarrow ds = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$

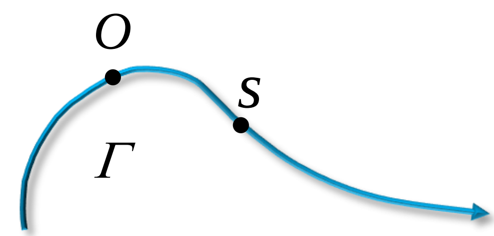
- se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni **continue** e **derivabili**

la curva e' "*rettificabile*" e la sua ***lunghezza*** nel tratto da a a b è

$$Lungh. = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt \quad \text{o anche} \quad \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

Curve piane

Ascissa curvilinea: se $f : [a,b] \rightarrow R^2$ rappresenta la curva piana Γ



- fissato un punto O su Γ come origine,
- scelto un verso positivo di percorrenza lungo Γ
- definita un' unita' di misura per la lunghezza

➢ ad ogni punto della curva Γ si associa un numero reale s detto

"*ascissa curvilinea*" definito come:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2}\, dt' \qquad per \quad t \neq a$$

$$s(t) = 0 \qquad per \quad t = a$$

$s(t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco della curva <u>*orientata*</u> Γ nel tratto di curva compreso tra il valore della funzione nel punto di partenza $f(a)$ e il valore della funzione nel generico punto $f(t)$

$s(t)$ e' invertibile, ossia esiste $t = g(s)$

se la curva Γ *e' rappresentata dalla*

$f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e' equivalente a $f'(s) = f(\, g(s)\,)$ con $f' : [0,L] \rightarrow \mathbb{R}^2$

- $f'(s)$ e' la rappresentazione parametrica della curva orientata Γ espressa in funzione dell'ascissa curvilinea s

- il segno di s, e' positivo se il punto si trova dalla parte del verso positivo rispetto all'origine O, sara' negativo se il punto si trova dalla parte opposta rispetto ad O

attenzione : la differenza tra il valore finale dell'ascissa curvilinea s e quello iniziale **non** fornisce lo spazio percorso

potrebbe essere nulla anche se il corpo e' in movimento

ad es. nel caso di un moto periodico di andata e ritorno

- e' il ***modulo*** dell'ascissa curvilinea s a fornire la lunghezza dell'arco di curva rettificato

Backup Slides