Dato il vettore posizione $\vec{r}(t) = 2cos(4t)\hat{i} + 2sen(4t)\hat{j} + (t-3)\hat{k}$

calcolare le espressioni dei versori tangente, normale e binormale

ed il raggio di curvatura della traiettoria al generico tempo t

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}2cos(4t)\right)\hat{i} + 2cos(4t)\frac{d\hat{i}}{dt}$$

$$+\left(\frac{d}{dt}2\,sin(4t)\right)j + 2\,sin(4t)\frac{d\hat{j}}{dt} + \left(\frac{d}{dt}(t-3)\right)\hat{k} + (t-3)\frac{d\hat{k}}{dt}$$

ma come specificato il sistema di riferimento rispetto al quale si descrive

il moto e' per assunzione fisso nel tempo percio' $\frac{d\hat{i}}{dt} = 0$ etc. quindi

- Velocita' $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -8\,sen(4t)\hat{i} + 8cos(4t)\hat{j} + \hat{k}$
- Accelerazione $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -32\,cos(4t)\hat{i} - 32sen(4t)\hat{j}$

Versore tangente $\hat{t}$

$$\hat{t} = \frac{\vec{\mathrm{v}}}{\left|\vec{\mathrm{v}}\right|}$$

se $\quad \vec{\mathrm{v}} = -8\,sen\left(4t\right)\hat{i} + 8cos\left(4t\right)\hat{j} + \hat{k}$

$$\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \sqrt{64\,sen^2\left(4t\right) + 64\,cos^2\left(4t\right) + 1} = \sqrt{64\left(sen^2\left(4t\right) + cos^2\left(4t\right)\right) + 1}$$

$$\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \sqrt{65} \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = \frac{1}{\sqrt{65}}\left(-8\,sen\left(4t\right)\hat{i} + 8cos\left(4t\right)\hat{j} + \hat{k}\right)$$

- accelerazione tangenziale e centripeta

$$\vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_c\hat{u}_c$$

$$\left|\vec{a}_t\right| = \vec{a}\cdot\hat{t} =$$

$$= \left(-32\cos\left(4t\right)\hat{i} - 32sen\left(4t\right)\hat{j}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\left(-8\,sen\left(4t\right)\hat{i} + 8\cos\left(4t\right)\hat{j} + \hat{k}\right)\right)$$

$$= \frac{32}{\sqrt{65}}\ \left(+8\,sen\left(4t\right)\cos\left(4t\right) - 8\,sen\left(4t\right)\cos\left(4t\right)\right) = 0$$

$$\left|\vec{a}_t\right| = \vec{a}\cdot\hat{t} = 0$$ → l’accelerazione e’ solo centripeta

$\Rightarrow$ $$\vec{a}_c \equiv \vec{a} = -32\cos\left(4t\right)\hat{i} - 32sen\left(4t\right)\hat{j}$$

Versore centripeto (normale) $\hat{u}_c$

$$\left|\vec{a}_c\right| = \sqrt{32^2 sen^2\left(4t\right) + 32^2 cos^2\left(4t\right)} \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{a}_c\right| = 32$$

$$\hat{u}_c = \frac{\vec{a}_c}{\left|\vec{a}_c\right|} = \frac{-32 cos\left(4t\right)\hat{i} - 32 sen\left(4t\right)\hat{j}}{32}$$

$$\hat{u}_c = -cos\left(4t\right)\hat{i} - sen\left(4t\right)\hat{j}$$

Raggio di curvatura ρ

$$\left|\vec{a}_c\right| = a_c = \frac{\mathrm{v}^2}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\mathrm{v}^2}{\left|\vec{a}_c\right|}$$

$$\left|\vec{\mathrm{v}}\right| = \sqrt{65} \qquad \left|\vec{a}_c\right| = 32 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{65}{32}$$

la curvatura κ di una linea curva per definizione e' uguale all'inverso

del raggio di curvatura ρ $\Rightarrow$ $\kappa = \frac{1}{\rho}$

κ fornisce informazioni su quanto la curva si discosti da una retta che giaccia nel piano osculatore della curva

Versore binormale) $\hat{u}_b$

$$\hat{b}=\hat{t}\times u_c =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{65}}\left(-8\,sen\left(4t\right)\hat{i}+8cos\left(4t\right)\hat{j}+\hat{k}\right)\times\left(-cos\left(4t\right)\hat{i}-sen\left(4t\right)\hat{j}\right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\hat{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\hat{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\hat{k}$$

$$\left(\hat{t}\times u_c\right)_x=\frac{1}{\sqrt{65}}\left[8cos\left(4t\right)\cdot 0-1\cdot\left(-sen\left(4t\right)\right)\right]\hat{i}=-\frac{sen\left(4t\right)}{\sqrt{65}}\hat{i}$$

$$\left(\hat{t}\times u_c\right)_y=\frac{1}{\sqrt{65}}\left[1\cdot\left(-cos\left(4t\right)\right)-\left(-8\,sen\left(4t\right)\right)\cdot 0\right]\hat{j}=-\frac{cos\left(4t\right)}{\sqrt{65}}\hat{j}$$

$$\left(\hat{t}\times u_c\right)_z=\frac{1}{\sqrt{65}}\left[\left(-8sen\left(4t\right)\left(-sen\left(4t\right)\right)\right)-\left(8cos\left(4t\right)\left(-cos\left(4t\right)\right)\right)\right]\hat{k}=+\frac{8}{\sqrt{65}}\hat{k}$$

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{65}}\left[-sen(4t)\,\hat{i} \; - \; cos(4t)\,\hat{j} \; + \; 8\hat{k} \;\right]$$

si definisce **torsione** di una curva la grandezza $\tau = \frac{d\hat{b}}{ds}$

la torsione fornisce una misura di quanto la curva esca dal piano osculatore

$\tau = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ curva piana

Backup Slides