Esperimenti aleatori

un esperimento e' l'osservazione del verificarsi di qualche "accadimento" che, a partire da determinate condizioni iniziali, porta ad un particolare "stato delle cose finali "

se si ripete l'esperimento nelle identiche condizioni iniziali, il risultato dovrebbe essere riproducibile a piacimento → dovrebbe fornire ogni volta lo <u>stesso identico risultato numerico</u> (determinismo della meccanica classica)

nella realta' gli esperimenti di precisione, non sono mai perfettamente riproducibili

- **un esperimento si definisce *aleatorio* se il verificarsi di un risultato non è prevedibile a partire dalla conoscenza delle leggi fisiche e delle condizioni iniziali**

la ***probabilita'*** e' la valutazione della verosimiglianza

(credibilità, attendibilità, ammissibilità, plausibilità)

che un fenomeno aleatorio ha di accadere

Esperimento aleatorio

ad es. il lancio di un dado

→ **Risultati** → **{ Eventi }** → **Probabilita' degli eventi ?**

esiti dello esperimento "lancio di un dado"

{ risultati dell' esperimento e/o insiemi di risultati }

{ eventi *"elementari"* } *nel lancio di un dado*

⇨ { esce la faccia con il numero 3 } ⇨ { **3** }

⇨ { esce la faccia con il numero 6 } ⇨ { **6** }

etc. *etc.*

ma un evento potrebbe anche essere :

{ **esce un numero pari** } ⇨ { **2,4,6** }

➢ definizione classica (aprioristica) di probabilta':

$$P(A) = \frac{\text{numero di casi in cui si ha l'evento favorevole } A}{\text{numero casi totali}} = \frac{N_A}{N_{tot}}$$

nacque nell'ambito dei giochi d'azzardo e storicamente e' la prima definizione di probabilita'

Limitazioni concettuali della definizione classica di probabilita'

- presuppone a priori che tutti gli eventi siano <u>equiprobabili</u>

Probabilita' frequentistica:

al posto del rapporto $\frac{\text{numero di casi in cui si ha l'evento favorevole } A}{\text{numero casi totali}} = \frac{N_A}{N_{tot}}$

si fa riferimento al numero di prove N_{prove_A} in cui si e' verificato l'evento

favorevole A rispetto al numero totale di prove effettuate $N_{prove_{tot}}$

dove $N_{prove_{tot}} > 0$ → dobbiamo aver fatto almeno una prova in analogia con la definizione classica di probabilita' si potrebbe definire

$P(A)$ semplicemente come $\dfrac{N_{prove_A}}{N_{prove_{tot}}}$ ma questo ha il difetto che

la probabilita' di A verrebbe a dipendere dal numero delle prove effettuate

Esempio esplicativo

1) supponiamo di lanciare per tre volte, in lanci indipendenti tra loro, una moneta equa dove "moneta equa" → prob. di testa = prob. di croce = 0.5

2) supponiamo che il risultato a noi **favorevole** sia: esce testa { **T** }

3) calcoliamo la probabilita' che esca testa secondo la formula

$$P(T) = \frac{\text{numero di prove in cui si ha l'evento favorevole}}{\text{numero di prove totali}} = \frac{N_{prove_A}}{N_{prove_{tot}}} = \frac{N_{testa}}{N_{lanci}}$$

al primo lancio potrebbe uscire per es. **testa**

$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \Rightarrow P = \left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

al secondo lancio potrebbe uscire per es. **testa**

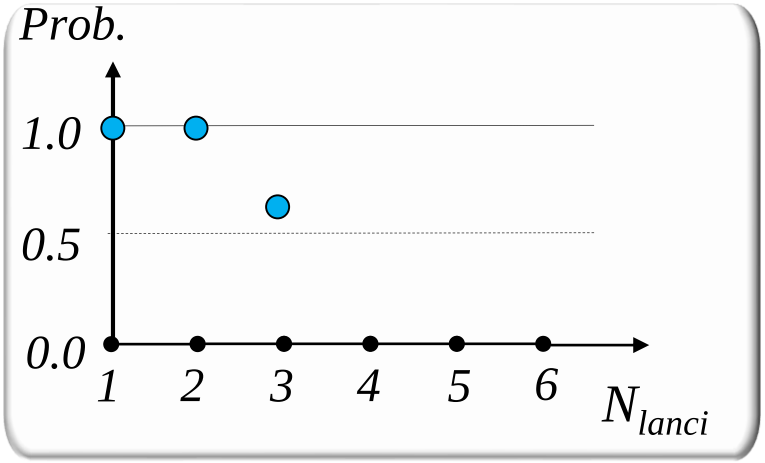
$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \Rightarrow P = \left(\frac{1+1}{2}\right) = 1$$

al terzo lancio potrebbe uscire per es. **croce**

$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \Rightarrow P = \left(\frac{1+1+0}{3}\right) = \frac{2}{3} = 0.67$$

4) grafichiamo $P(T)$ in funzione del numero N_{lanci} di lanci della moneta

evento: sequenza { **T T C** }



ma sarebbe anche potuta presentarsi la sequenza

al primo lancio
per es. croce

$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \Rightarrow \quad P = \left(\frac{0}{1}\right) = 0$$

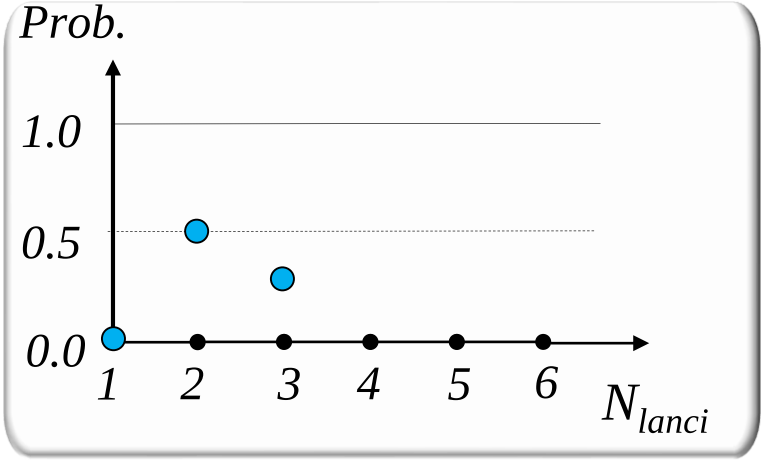
al secondo lancio
per es. testa

$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \Rightarrow \quad P = \left(\frac{0+1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 0.5$$

al terzo lancio
per es. croce

$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \Rightarrow \quad P = \left(\frac{0+1+0}{3}\right) = \frac{1}{3} = 0.33$$

evento: sequenza { **C T C** }



tabulando tutte le possibili sequenze nel caso di tre lanci della moneta

I lancio	II lancio	III lancio
T	T	T
T	T	C
T	C	T
T	C	C
C	T	T
C	T	C
C	C	T
C	C	C

$\Rightarrow$

I lancio	II lancio	III lancio
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

$\Rightarrow$

$P(A) = \frac{N_{testa}}{N_{lanci}}$
1.00
0.67
0.67
0.33
0.67
0.33
0.33
0.00

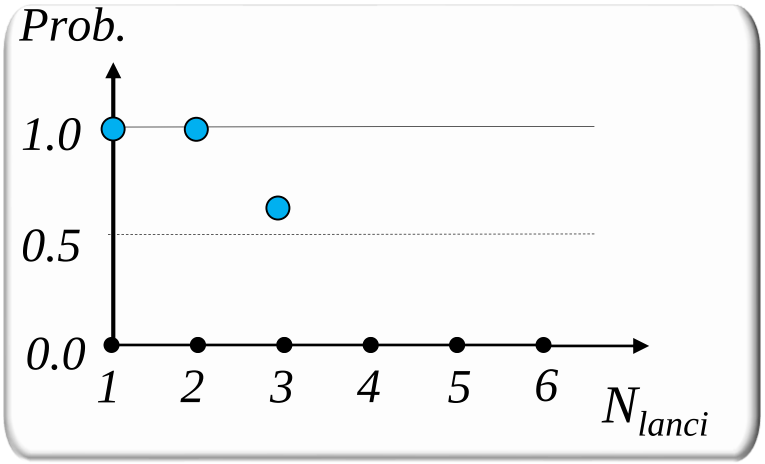
Nota bene : nel caso di tre lanci non compare piu' il valore di $P(T) = 0.5$

che si presentava nel caso dei due lanci valore che, in generale, potra'

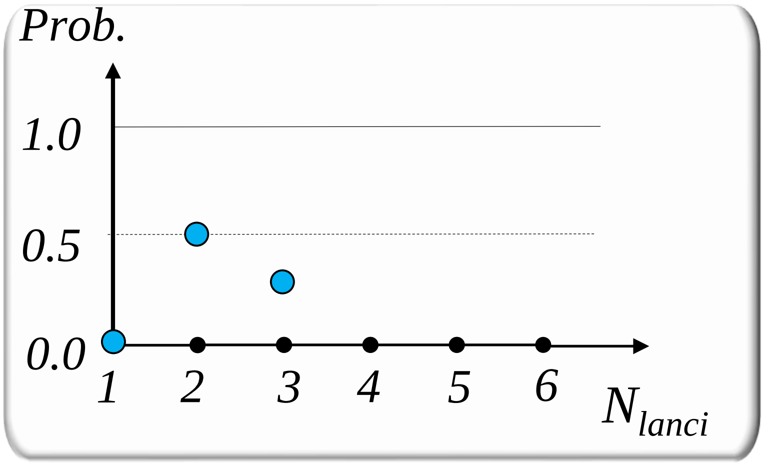
presentarsi nel caso di un qualsiasi numero **pari** di lanci

e che dovrebbe essere il valore di probabilita' che ci aspettiamo in aggiunta: le due sequenze sono davvero molto diverse una dall'altra

evento: sequenza { **T T C** }



evento: sequenza { **C T C** }



ma supponiamo di continuare ad effettuare altri lanci della moneta

dopo che si e' presentata la sequenza T T C al quarto lancio potrebbe capitare per es. testa

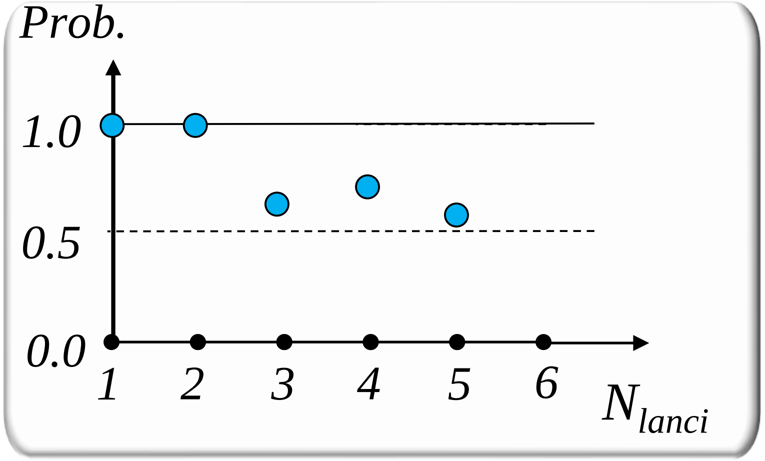
$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \quad \Rightarrow \quad P = \left(\frac{1+1+0+1}{4}\right) = \frac{3}{4} = 0.75$$

al quinto lancio potrebbe capitare per es. croce

$$\left(\frac{\text{numero di lanci della moneta in cui esce testa}}{\text{numero lanci totali}}\right) \quad \Rightarrow \quad P = \left(\frac{1+1+0+1+0}{5}\right) = \frac{3}{5} = 0.60$$

il grafico associato alla sequenza T, T, C,T, C sarebbe

evento: sequenza { **T T C T C**}



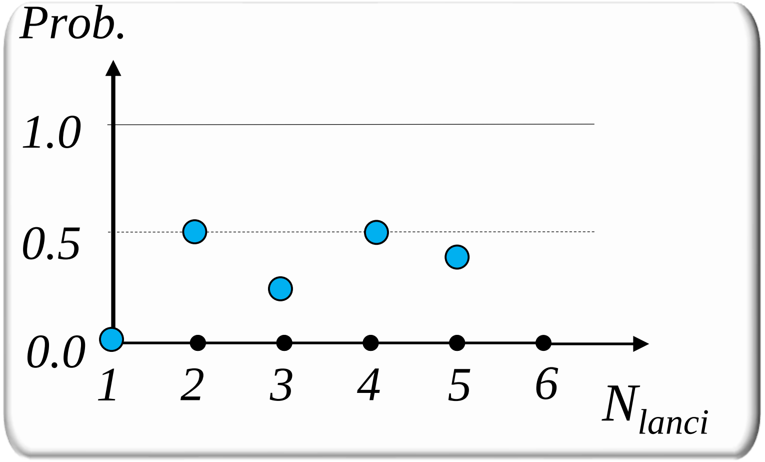
effettuiamo altri due lanci della moneta

dopo che si e' presentata la sequenza C T C

e supponiamo che esca di nuovo T al quarto lancio e C al quinto lancio

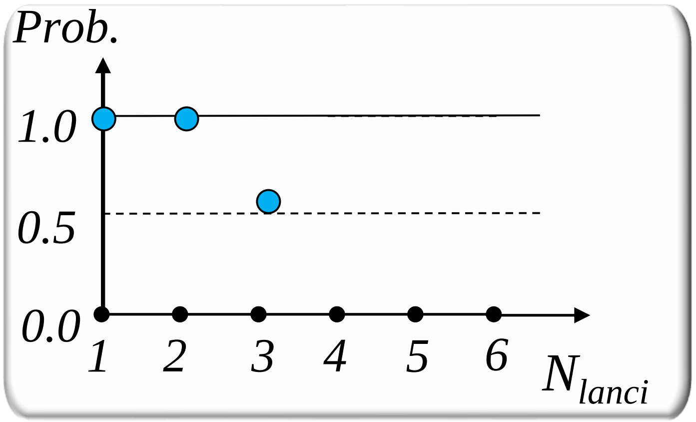
il grafico associato a questa sequenza sarebbe

evento: sequenza { **C T C T C**}

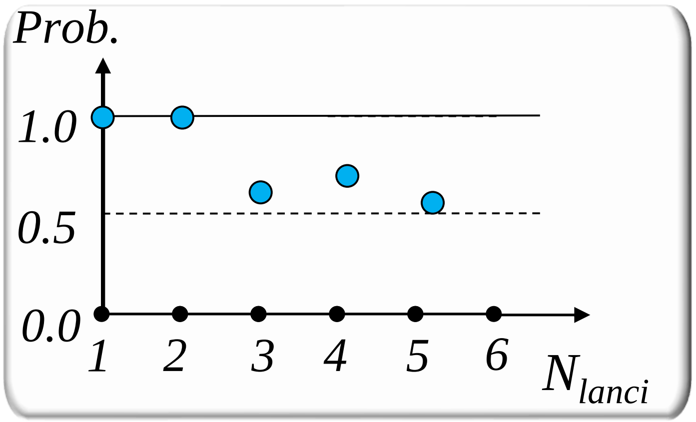


la comparazione dei grafici delle varie possibili sequenze
in funzione del numero di lanci effettuati

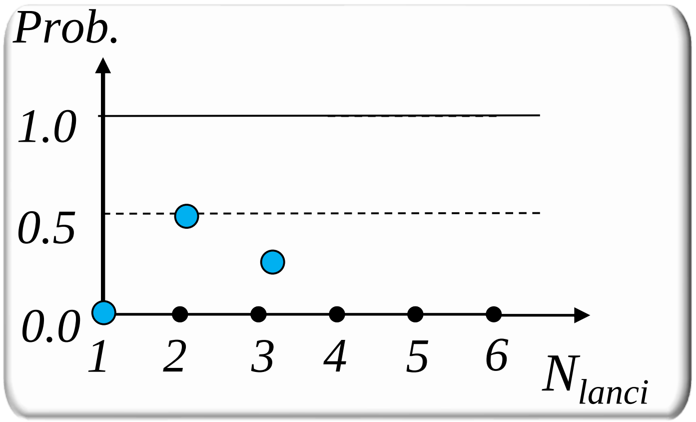
3 lanci



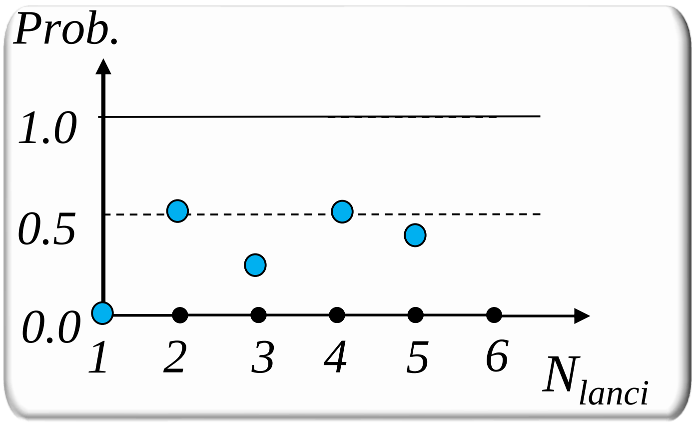
5 lanci



3 lanci

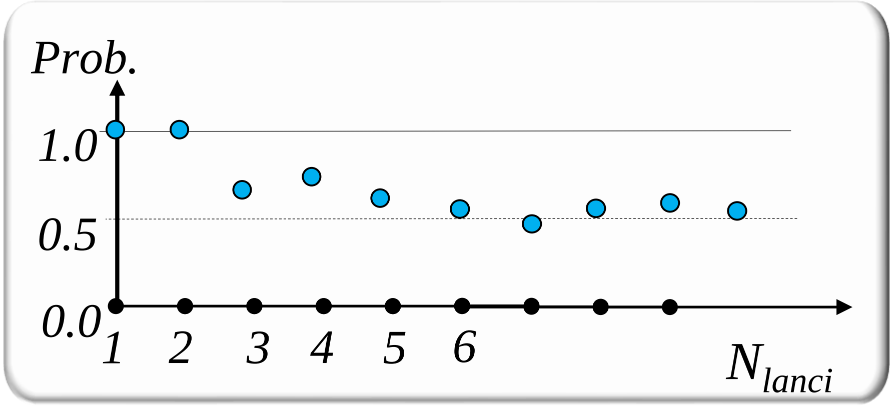


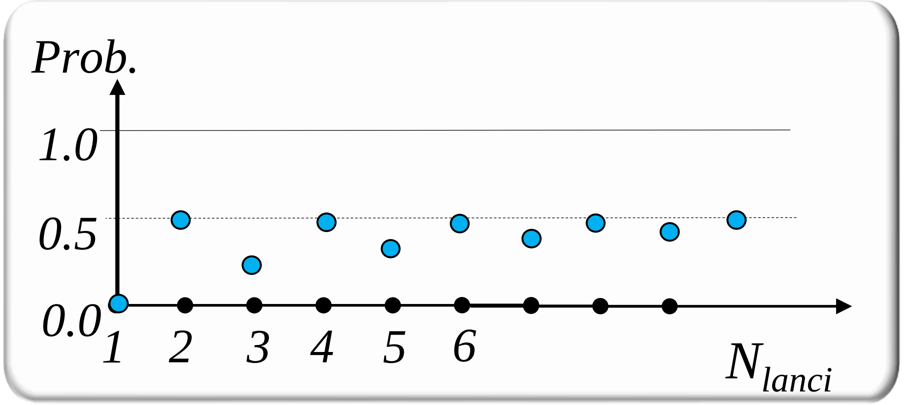
5 lanci



suggerisce che , al crescere del numero di lanci il rapporto $\frac{N_{testa}}{N_{lanci}}$

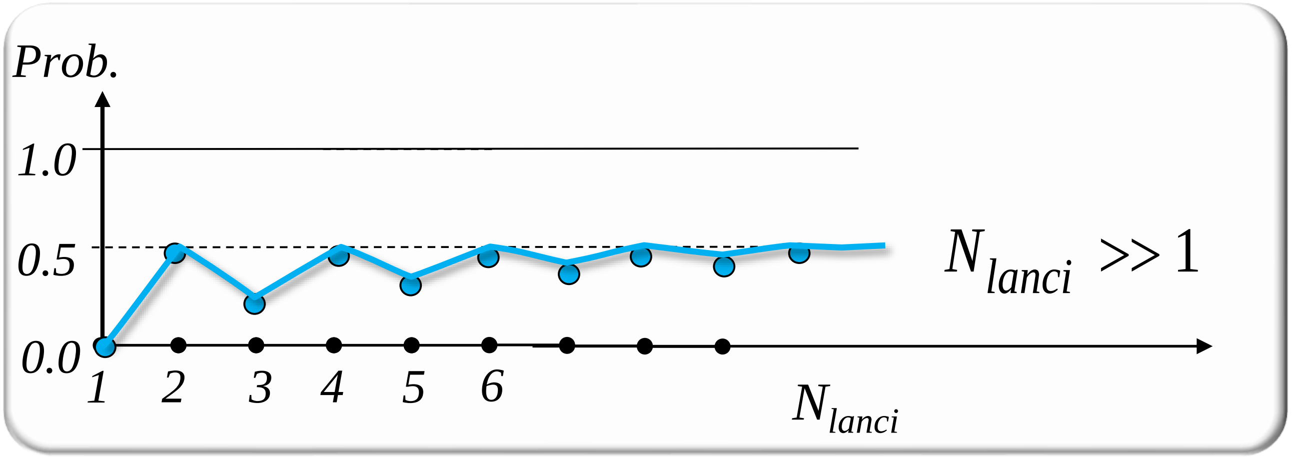
si stabilizzi attorno ad un preciso valore, 0.5 in questo caso,





indipendentemente da come e' iniziata la sequenza , con testa al primo lancio, o croce al primo lancio, la sequenza non e' continua e non e' assimilabile ad una funzione matematica

ma se il numero di lanci e' grande, per $N_{lanci} >> 1$,



al limite per $N_{lanci} \to \infty$ si puo' pensarla senz'altro come tale

a questo punto viene naturale fare uso dell'analisi matematica

che ci suggerisce di definire $P(T)$ come $\lim\limits_{N_{lanci} \to \infty} \dfrac{N_{testa}}{N_{lanci}}$

- **definizione frequentistica di probabilita' :**

$$P(A) = \lim_{N_{prove_{tot}} \to \infty} \frac{N_{prove_A}}{N_{prove_{tot}}}$$

Limitazioni concettuali della definizione frequentistica di probabilita'

questa definizione e' molto usata in ambito scientifico ma….

a) presuppone che le prove siano ripetibili a piacimento

b) in pratica non si possono effettuare un numero infinito di prove

c) anche se si potesse effettuare un numero infinito di prove
non sarebbe garantito di pervenire al risultato corretto

ma $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$? $\Rightarrow$ si dice che L e' il limite di $f(x)$ per $x \to \infty$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N > 0 \ \mid \ \text{se} \ \ x > N \ \Rightarrow \ \left| f(x) - L \right| < \varepsilon}$$

in italiano:

per ogni numero reale maggiore di zero e <u>piccolo</u> a piacere $(\ \varepsilon\ )$

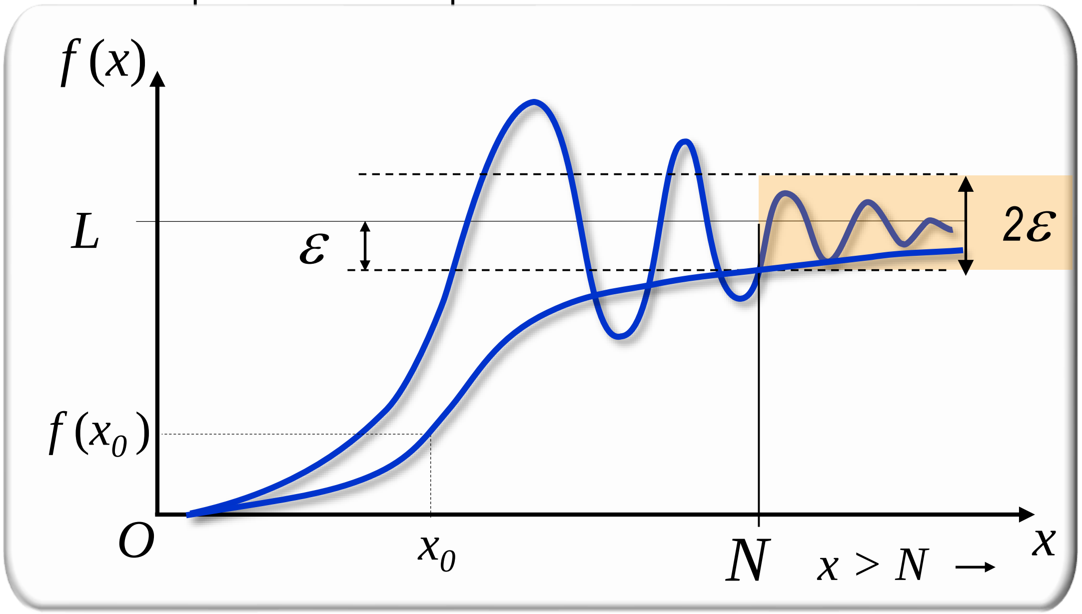
esiste un altro numero reale maggiore di zero e <u>grande</u> a piacere $(\ N\ )$

tale per cui l'ammontare della differenza $\left| f(x) - L \right|$

(la distanza di $f(x)$ da L)

risulta minore di ε

per <u>tutti</u> gli $x > N$



ma se il lancio della moneta e' un esperimento aleatorio **non** possiamo

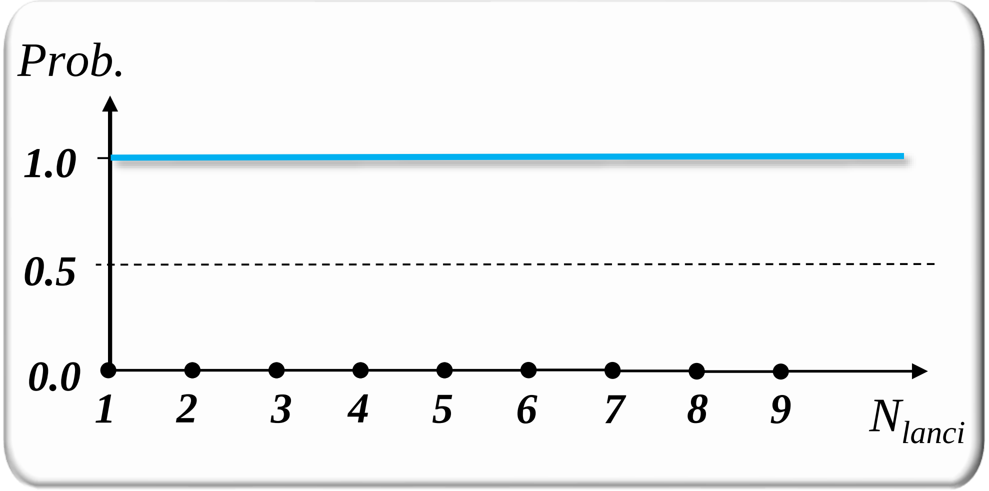
escludere che esca sempre testa (o sempre croce) in N lanci della moneta

in effetti risulta che $P(N \ teste \ in \ N \ lanci) = \dfrac{1}{2^N}$

e se N tende all'infinito $P(N = \infty) = \dfrac{1}{2^\infty} = 0$

dunque l'evento { esce sempre testa in una infinita' di lanci } ha probabilita' nulla

ma a priori **non** e' un evento impossibile anche se la moneta e' equa



Backup Slides