

Moti nel piano

Moti armonici semplici

il moto circolare uniforme piano proiettato sugli assi cartesiani

produce moti sinusoidali (armonici) unidimensionali

$$x(t) = r \cos(\theta(t)) = r \cos (\omega t + \theta_0)$$

$$y(t) = r \sin(\theta(t)) = r \sin (\omega t + \theta_0)$$

notare la differenza tra il concetto di pulsazione e di velocità angolare

che coincidono nel moto circolare uniforme

Caratteristiche della proiezione del moto lungo un asse

l'equazione oraria del moto lungo l'asse x è

$$x(t) = r \cos(\omega t + \theta_0)$$

il moto è oscillatorio ed è compreso tra $-r$ e $+r$

→ è un moto “armonico semplice”

$$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2 = -\omega^2 r \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\Rightarrow d^2x(t)/dt^2 + \omega^2 x(t) = 0$$

e analogamente per la y

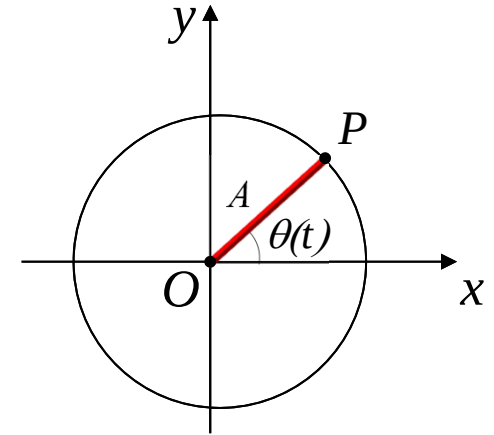
Richiami: il moto armonico piano

un punto materiale si muove di moto circolare uniforme

con velocità angolare $\omega = d\vartheta / dt$

nel piano xy con $OP = r = A$

sia $\theta(t)$ l'angolo tra A e l'asse delle ascisse al generico tempo t



se al tempo $t = 0$ il punto si trova nella posizione $(+A, 0) \rightarrow \theta_0 = \theta(0) = 0$

$\rightarrow$ le proiezioni del moto sugli assi al generico tempo t saranno

$$x = A \cos(\omega t + \vartheta_0) = A \cos(\omega t)$$

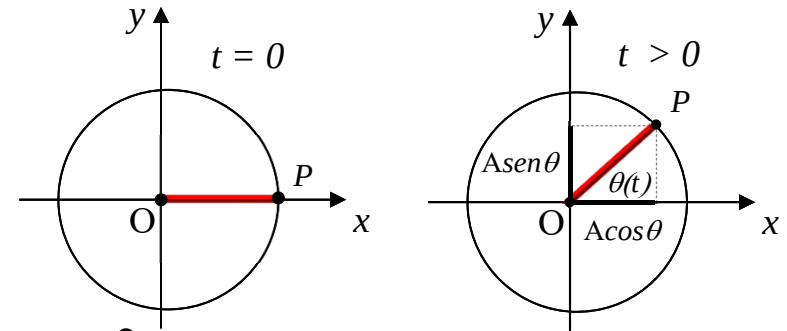
$$y = A \sin(\omega t + \vartheta_0) = A \sin(\omega t)$$

$$x = A \cos \vartheta(t) \Rightarrow \frac{x}{A} = \cos(\omega t) \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} = \cos^2(\omega t)$$

$$y = A \sin \vartheta(t) \Rightarrow \frac{y}{A} = \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{y^2}{A^2} = \sin^2(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2$$

dunque la traiettoria è una circonferenza, ma in quale senso è percorsa, orario o antiorario ?



$$x = A \cos \omega t$$

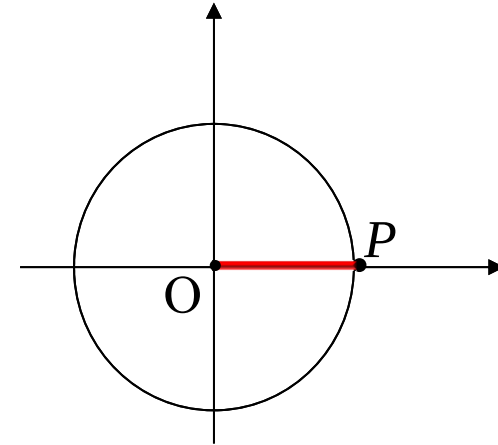
se

$$y = A \sin \omega t$$

a $t = 0$

$$x(t = 0) = A \cos 0 = A$$

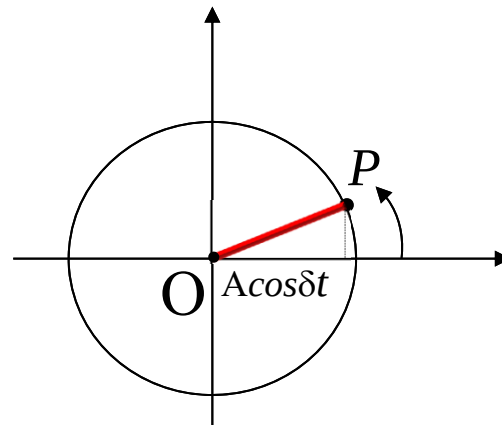
$$y(t = 0) = A \sin \omega t = 0$$



al tempo $t = + \delta t$

$$x = A \cos \omega \delta t < A$$

$$y = A \sin \omega \delta t > 0$$



$\Rightarrow$

senso
antiorario
(levogiro)

$$x = A \cos \omega t$$

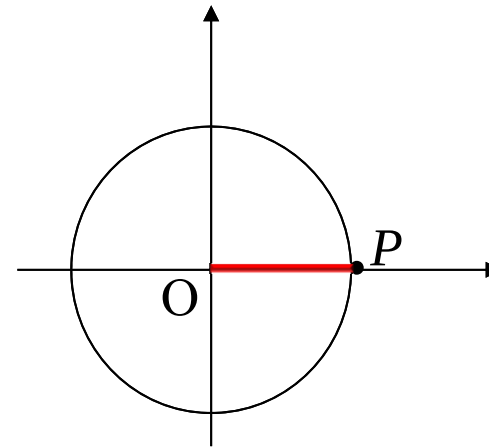
se

$$y = -A \sin \omega t$$

a $t = 0$

$$x(t = 0) = A \cos 0 = A$$

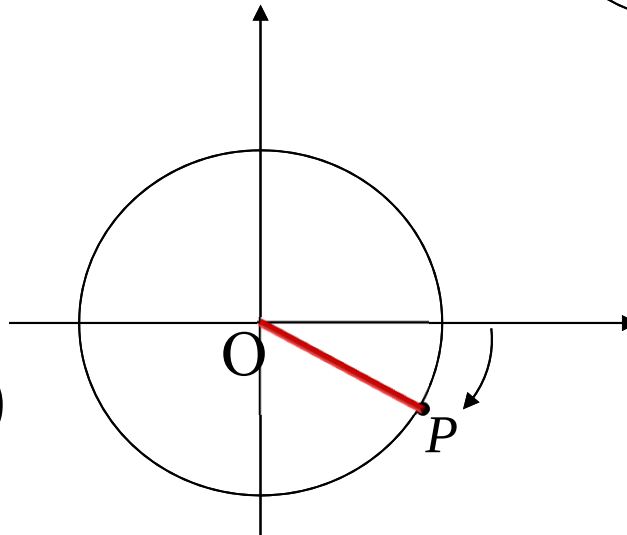
$$y(t = 0) = -A \sin 0 = 0$$



al tempo $t = + \delta t$

$$x = A \cos \omega \delta t < A$$

$$y = -A \sin \omega \delta t < 0$$



$\Rightarrow$

**senso orario
(destrogiro)**

la traiettoria e' ancora una circonferenza, ma il senso di percorrenza e' orario

➤ da notare che $y = -A \sin \omega t = A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

posto $x = A \cos(\omega t)$ se
 $y = A \cos(\omega t + \vartheta_0)$

$\vartheta_0 = 0$ $x = A \cos(\omega t)$ $y = x$ traiettoria
 $y = A \cos(\omega t)$ rettilinea

$\vartheta_0 = \pi$ $x = A \cos(\omega t)$ $y = -x$ traiettoria
 $y = A \cos(\omega t + \pi) = -A \cos(\omega t)$ rettilinea

$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2}$ $x = A \cos(\omega t)$ $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$ traiettoria
 $y = A \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -A \sin(\omega t)$ circolare
 destrogiro

$\vartheta_0 = \frac{3\pi}{2}$ $x = A \cos(\omega t)$ $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$ traiettoria
 $y = A \cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = A \sin(\omega t)$ circolare
 levogiro

piu' in generale posto

$$\begin{aligned} x &= A \cos(\omega t) \\ y &= B \cos(\omega t + \vartheta_0) \end{aligned} \quad \text{se}$$

$$\vartheta_0 = 0 \quad \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t) \\ y &= B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad y = \frac{B}{A} x \quad \begin{array}{l} \text{traiettoria} \\ \text{rettilenea} \end{array}$$

$$\vartheta_0 = \pi \quad \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t) \\ y &= B \cos(\omega t + \pi) = -B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad y = -\frac{B}{A} x \quad \begin{array}{l} \text{traiettoria} \\ \text{rettilenea} \end{array}$$

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{2} \quad \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t) \\ y &= B \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -B \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{traiettoria} \\ \text{ellittica} \\ \text{destrogiro} \end{array}$$

$$\vartheta_0 = \frac{3\pi}{2} \quad \begin{aligned} x &= A \cos(\omega t) \\ y &= B \cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = B \sin(\omega t) \end{aligned} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \quad \begin{array}{l} \text{traiettoria} \\ \text{ellittica} \\ \text{levogiro} \end{array}$$

due moti armonici indipendenti con differenza di fase di $\pi/2$ combinati insieme
possono dare origine non solo ad un moto circolare nel piano
ma modificando la fase relativa e/o la frequenza e/o l'ampiezza si possono
ottenere una serie di diverse traiettorie (figure di Lissajous)

per una dimostrazione in aula andare al sito :

<http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lissajous.htm>

Backup Slides