

Teorema di Bayes

per definizione di probabilita' condizionata

$$P(A / B) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(B)} \quad \text{e} \quad P(B / A) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(A)}$$



$$P(B / A)P(A) = P(A \text{ e } B)$$

$$P(A / B) = \frac{P(B / A)P(A)}{P(B)}$$

per il teorema della probabilita' totale

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B / A_i)$$

$$P(A / B) = \frac{P(B / A)P(A)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B / A_i)}$$

“ teorema di Bayes ”

si puo' intuire l'importanza del teorema di Bayes ragionando in termini di causa ed effetto:

se vi sono piu' possibili cause C_1, C_2, \dots, C_n che possono produrre lo stesso effetto E ,

ci si puo' domandare:

- dato che si e' presentato E , quale sara' la probabilita' che il verificarsi di E sia dovuto alla i -esima causa C_i

utilizzando il teorema di Bayes:
$$P(C_i / E) = \frac{P(E / C_i)P(C_i)}{P(E)}$$

ovvero
$$P(C_i / E) = \frac{P(E / C_i)P(C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(E / C_i)}$$

esempio : la diagnosi del medico di famiglia

Esercizio

in una fabbrica di componenti meccanici di precisione due macchine fresatrici F_1 e F_2 coprono rispettivamente il 10% ed il 90% della produzione totale.

La macchina F_1 e' operata manualmente e produce l' 1 % di scarti, mentre la macchina F_2 e' automatica, e produce il 5 % di scarti.

I pezzi prodotti dalle due fresatrici vengono mescolati tra loro e, al termine di ogni giornata, viene effettuato un controllo di qualita' a campionamento casuale sull'intera produzione.

Quale sara' la probabilita' che un pezzo scelto a caso sia di scarto ?

Se il pezzo campionato a caso risultasse difettoso quale sarebbe la probabilita' che sia stato prodotto dalla macchina F_1 ?

$$F_1 = \{ \text{pezzo prodotto dalla fresatrice } F_1 \} \quad F_2 = \{ \text{pezzo prodotto dalla fresatrice } F_2 \}$$

$$Scrt = \{ \text{pezzo di scarto} \}$$

$$P(F_1) = 0.10 \quad P(F_2) = 0.90 \quad P(Scrt / F_1) = 0.01 \quad P(Scrt / F_2) = 0.05$$

F_1 ed F_2 costituiscono una partizione dello spazio degli eventi ?

gli eventi a_i costituiscono una *partizione* di S se $a_i \cap a_j = 0$ e $\bigcup_{i=1}^n a_i = S$

e' vero che $F_1 \cap F_2 = 0$? Resp. SI' e' vero che $F_1 \cup F_2 = S$? Resp. SI'

➤ gli eventi F_1 ed F_2 costituiscono una partizione dello spazio degli eventi dunque

per il **teorema della probabilita' totale** se B e' un qualsiasi evento dello spazio degli eventi

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(a_i)P(B / a_i) \quad \text{in questo esempio B sarebbe l'evento } Scrt$$

$$\text{perciò in questo caso } P(Scrt) = \sum_{i=1}^2 P(F_i)P(Scrt / F_i) \quad \text{ossia}$$

$$P(Scrt) = P(F_1)P(Scrt / F_1) + P(F_2)P(Scrt / F_2) = 0.1 \cdot 0.01 + 0.9 \cdot 0.05$$

$$= 0.001 + 0.045 = 4.6\%$$

per rispondere alla seconda domanda dobbiamo calcolare $P(F_i / Scrt)$

→ **teorema di Bayes**
$$P(C_i / E) = \frac{P(E / C_i)P(C_i)}{P(E)} = \frac{P(E / C_i)P(C_i)}{\sum_{i=1}^n P(C_i)P(E / C_i)}$$

che in questo caso diviene
$$P(F_1 / Scrt) = \frac{P(Scrt / F_1)P(F_1)}{P(Scrt)} = \frac{P(Scrt / F_1)P(F_1)}{\sum_{i=1}^2 P(F_i)P(Scrt / F_i)}$$

denominatore = $P(Scrt) = 4.6\%$ come precedentemente calcolato

inoltre $P(F_1) = 0.10$ e $P(Scrt / F_1) = 0.01$

quindi
$$P(F_1 / Scrt) = \frac{0.01 \cdot 0.1}{0.046} \Rightarrow P(F_1 / S) = 2.17\%$$

Backup Slides