Esperimento aleatorio

ad es. il lancio di un dado →

→ risultati → { eventi } → probabilita' → variabile aleatoria k

Risultati esperimento " lancio di un dado "

⇨

⇨

etc.

{ risultati elementari e/o insiemi di risultati }

Eventi elementari

{ esce la faccia con il numero 3 }

{ esce la faccia con il numero 6 }

etc.

⇩

ma un evento potrebbe anche essere: {esce un numero pari} ⇨ {2,4,6}

⇨

Assegnazione della probabilita' ai risultati **(eventi)** **elementari** ***dell'esperimento aleatorio " lancio di un dado "***

definizione di probabilita' classica, (se il dado non e' truccato) , o frequentistica, soggettiva etc. ⇨

$P(3) = 1/6$

$P(6) = 1/6$

etc.

assegnazione della probabilita' agli insiemi di risultati (eventi) → assiomi di Kolmogorov

⇩

Associazione degli eventi a valori numerici

⇨ $k = 3$

⇨ $k = 6$

etc.

⇩

ma la corrispondenza numerica e' arbitraria e poteva anche essere diversa

Variabili aleatorie

- una *variabile aleatoria* (v.a.) e’ una applicazione

  che associa un numero reale $\in [0,1]$ ad ogni risultato

  dello spazio degli eventi

in generale

- ogni esperimento aleatorio e’ caratterizzabile

  tramite una ***variabile aleatoria*** discreta o continua

Variabili aleatorie discrete

una v.a. *discreta* k e' rappresentata da una tabella e/o da una formula matematica, che specifica

- il valore numerico assunto dalla v.a. discreta
- la probabilita' associata ad ogni valore numerico assunto dalla v.a.

→ Variabile aleatoria k associata al lancio di un dado

<u>Esperimento</u> aleatorio

" lancio di un dado "

etc.

⇨ ***" variabile aleatoria "*** ⇨

Tabella di definizione della v. a. k

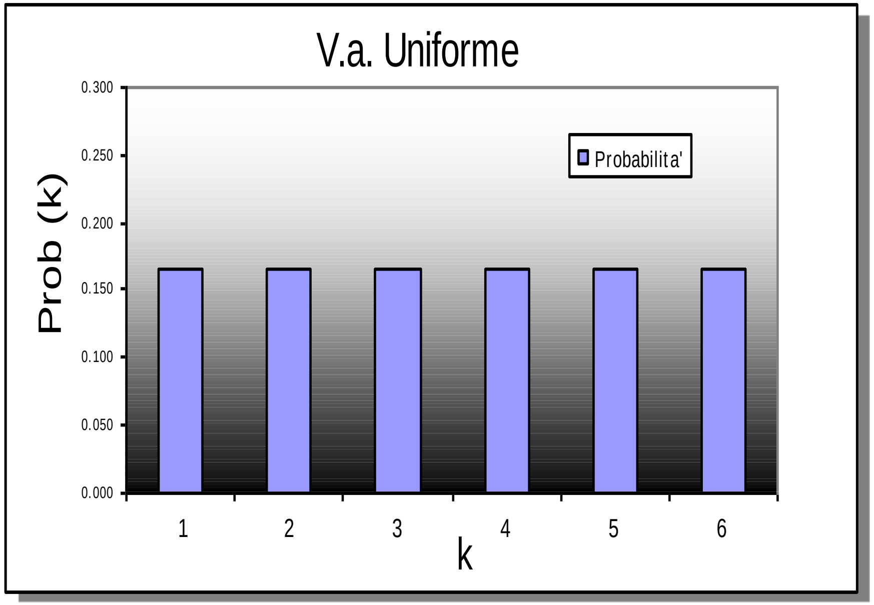
k	$P(k)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Definizione matematica della v. a. k

$$P(k) = \frac{1}{6}$$

per $k = 1, 2, \ldots 6$

Attenzione: la variabile k (x nel continuo) non e' semplicemente un numero un modo grafico di rappresentare una v.a. discreta e’ l’ **istogramma**

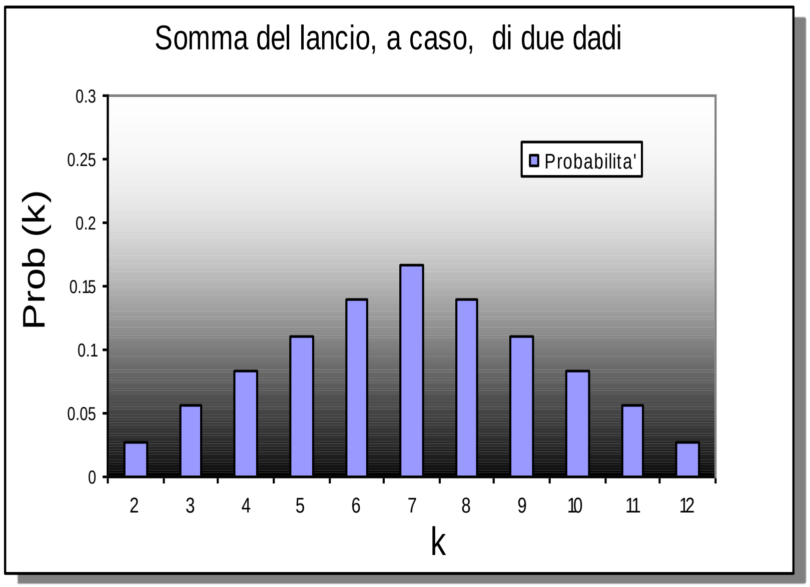


in un istogramma si graficano in successivi intervalli (bins) le probabilita’

(le ***<u>frequenze relative</u>***)

attenzione a non confondere il concetto di "a caso" con l'idea di distribuzione uniforme

es. : probabilita' della somma dei risultati nel lancio simultaneo di due dadi



il lancio di due dadi e' "a caso",

ma la somma dei risultati ottenuti

non e' distribuita in modo uniforme

Valor medio e Varianza di una v.a. discreta

per caratterizzare una v.a. in modo sintetico, ma necessariamente approssimativo,

si fa uso di indicatori di centralita' e di dispersione i principali indicatori sono

- *indice di centralita' della v.a.*

  ➢

  valor medio

  ($<k>$ o μ)

- *indice della dispersione della v.a. attorno al valor medio*

  ➢

  varianza

  (Var o σ^2)

  ➢

  $$\textbf{\textit{deviazione standard}} = \sqrt{(varianza)}$$

  ($r.m.s.$ o σ)

Valor medio di una v.a. discreta

per v.a. discrete k con dominio di definizione $k \in [0, n]$ (assumono una quantita' finita di valori) e/o con $k \in [0, \infty[$ (possono assumere una infinita' numerabile di valori)

$$< k > = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)}$$

dato che per l'assioma di normalizzazione $\sum_{i=1}^{n} P(k_i) = 1$

$$< k > \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i)$$

Varianza e deviazione standard di una v.a. discreta

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \langle k \rangle)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)} \equiv \sum_{i=1}^{n}(k_i - \langle k \rangle)^2 \cdot P(k_i)$$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \langle k \rangle)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)}} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(k_i - \langle k \rangle)^2 \cdot P(k_i)}$$

se la v.a. k non fosse estesa a tutto il suo dominio di definizione, ,

ma fosse limitata ad assumere valori compresi tra $k = n_1$ e $k = n_2$

$$< k >' = \frac{\sum_{i=n_1}^{n_2} k_i \cdot P(k_i)}{\sum_{i=n_1}^{n_2} P(k_i)} \qquad \sigma'^2 = \frac{\sum_{i=n_1}^{n_2} (k_i - \mu)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=n_1}^{n_2} P(k_i)} \qquad \text{etc.}$$

alcune tra le principali distribuzioni discrete sono :

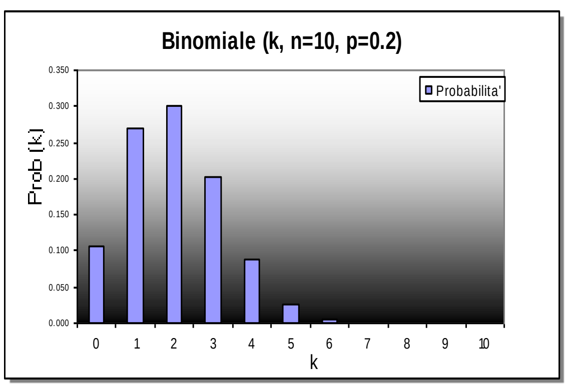
v.a. **Bernoulliana** o **binomiale**

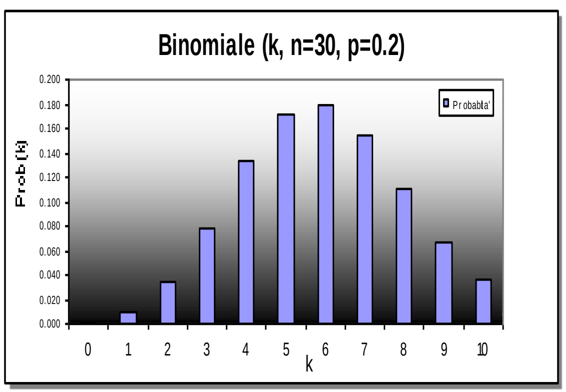
$$P_n(k) = \mathrm{Prob}(\ k\ successi\ in\ n\ prove\ ) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$n \in [1, +\infty[\qquad k \in [0, +\infty[\qquad q = 1 - p \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ad es. $4! = 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$$< k > = np \qquad var = npq \qquad (r.m.s.) \equiv \sigma = \sqrt{npq}$$

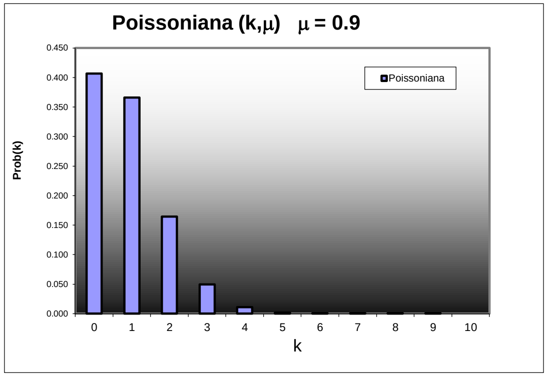




v.a. di **Poisson** (eventi rari)

$$P_\mu(k) = \mathrm{Prob}(\ k\ \textit{successi quando in media se ne hanno}\ \mu) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

$$k \in [0, +\infty[\qquad \mu \in [0, +\infty[$$



$$< k > = \boldsymbol{\mu} \qquad var = \boldsymbol{\mu} \qquad (r.m.s.) \equiv \sigma = \sqrt{\mu}$$

Variabili aleatorie (v.a.) continue

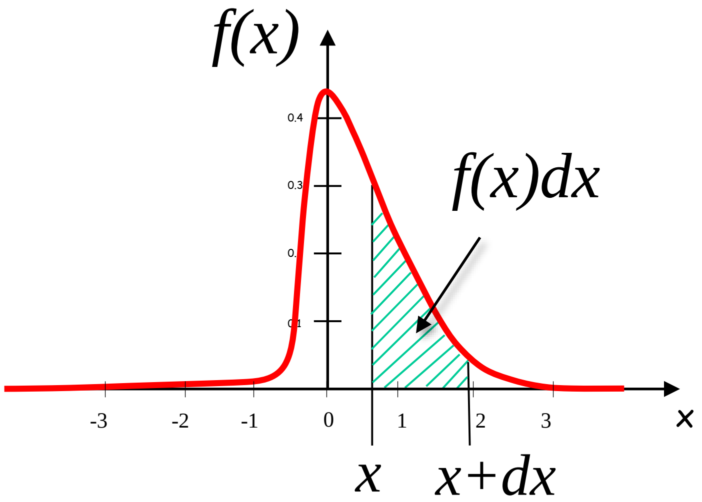
una v.a. *continua* X che possa assumere valori numerici x , con $x \in \mathbb{R}$

e' rappresentata da un funzione continua e derivabile $f(x)$ definita in modo che

$$\boxed{f(x)\, dx = Prob\{ \text{ che la v.a. } X \text{ assuma valori } \in [x,\, x + dx] \; \}}$$

il grafico della $f(x)$ puo' essere pensato come

un istogramma di binnaggio infinitesimo



$f(x)$ e' detta " ***densita' di probabilita*** " in quanto

se $$f(x)\,dx = Prob\{\ \ldots\ldots\ldots\ \} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{Prob\{\ \ldots\ldots\ldots\ \}}{dx}$$

per v.a. continue x che hanno dominio di definizione $x \in \mathbb{R}$

$$< x > \equiv \mu = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

dato che per l'assioma di normalizzazione $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

analogamente

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx}$$

se la v.a. x non fosse estesa a tutto il suo dominio di definizione,

ma fosse limitata ad assumere valori compresi tra $X = x_1$ e $X = x_2$

$$\mu' = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x f(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}$$

$$\sigma'^2 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (x-\mu)^2 f(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\int_{x_1}^{x_2} (x-\mu)^2 f(x)dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}}$$

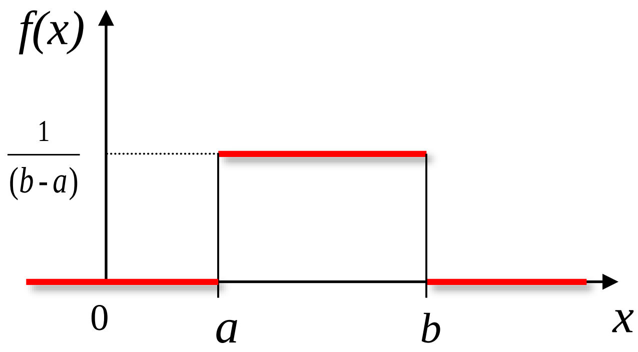
alcune tra le principali v.a. continue sono :

v.a. **Uniforme**

una v.a. uniforme (distribuzione casuale) nell'intervallo $[a,b]$ assume un valore costante in $[a,b]$

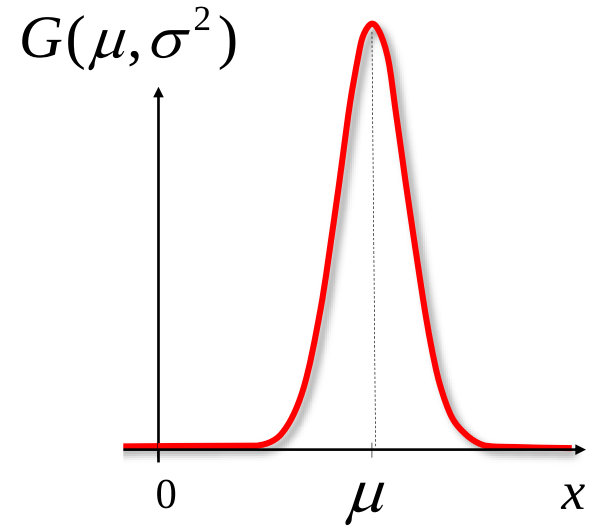
$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \qquad per\ x \in [a,b]$$

$$f(x) = 0 \qquad \textit{altrove}$$



$$< x > = \frac{(b+a)}{2} \qquad var = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (r.m.s.) \equiv \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

v.a. **Gaussiana** $G(x, \mu, \sigma^2)$ con $x \in \mathbb{R}$



$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$$ **(assioma di normalizzazione)**

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \mu$$ **(valor medio)**

$$var = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \sigma^2$$ **(varianza)** $\Rightarrow$ $(r.m.s.) = \sigma$

il massimo della curva → il valore piu' probabile si ha quando $\frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = 0 \Rightarrow x = \mu$

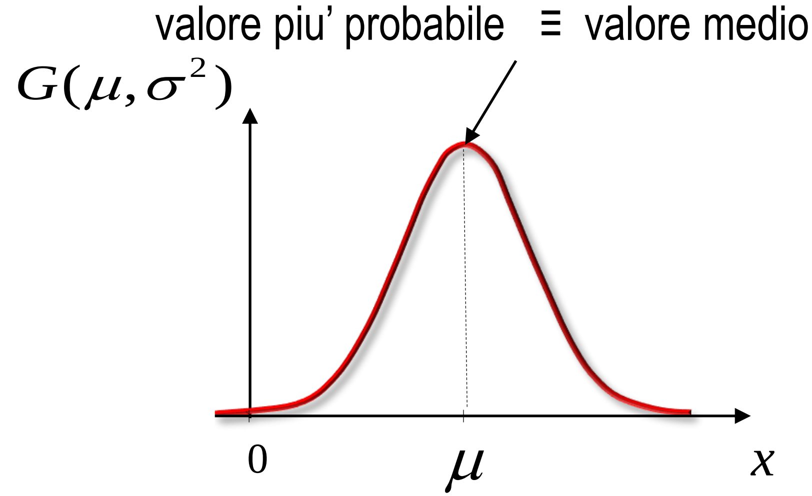
- **nella gaussiana il valore piu' probabile coincide con il valor medio** e cio' e' dovuto alla simmetria della curva

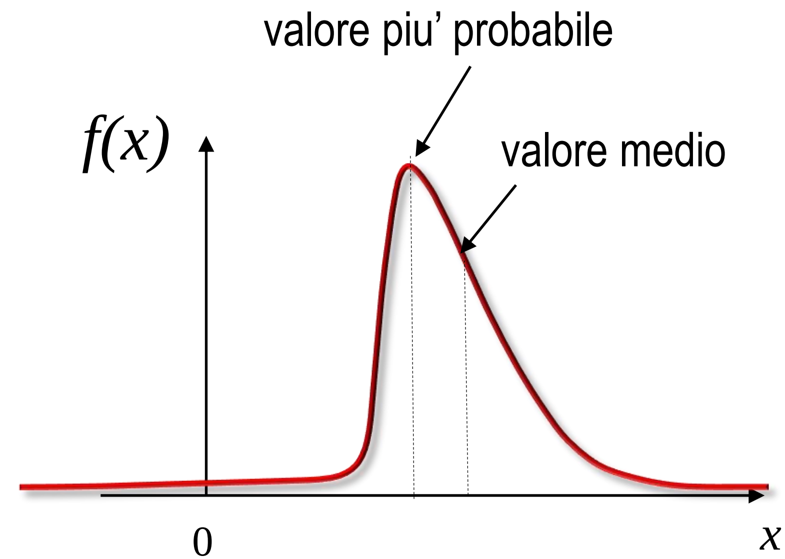
attorno al valor suo medio

ma se la curva non fosse simmetrica

il valore piu' probabile e il valor medio

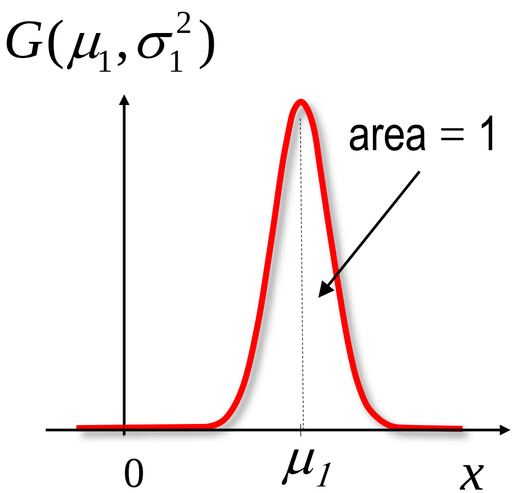
non coinciderebbero



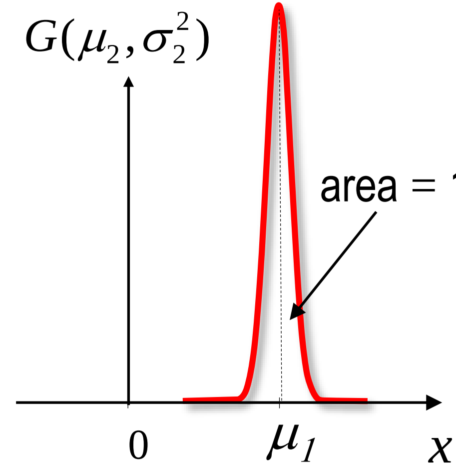


Proprieta' di trasformazione della Gaussiana

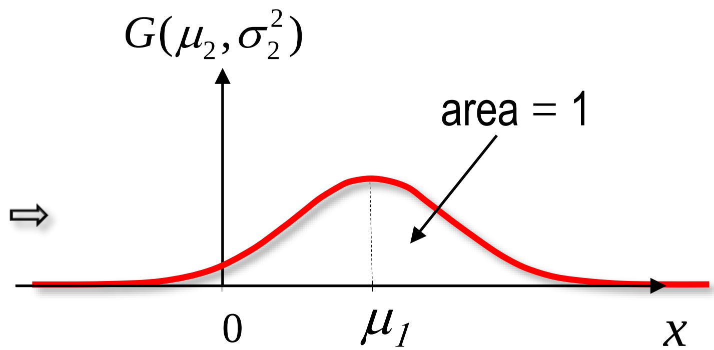
$$\text{area} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mu,\sigma^2)\,dx$$



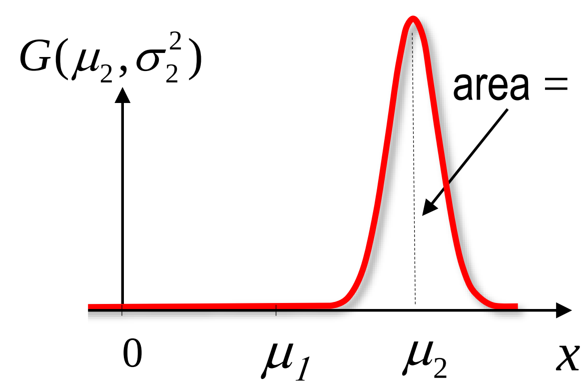
se $\mu_2 = \mu_1$, $\sigma_2 < \sigma_1$ $\Rightarrow$



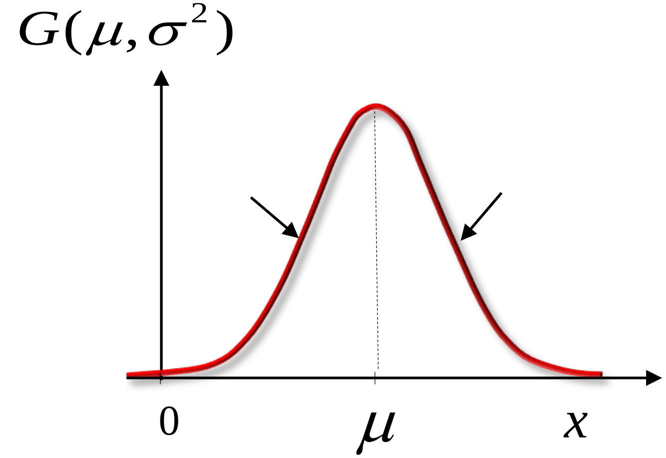
se $\mu_2 = \mu_1$, $\sigma_2 > \sigma_1$ $\Rightarrow$



se $\mu_2 > \mu_1$, $\sigma_2 = \sigma_1$ $\Rightarrow$



dal punto di vista di un puro e semplice



studio di funzione σ e' legata

alla posizione dei punti di flesso

della curva determinabili imponendo che $$\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}=0$$

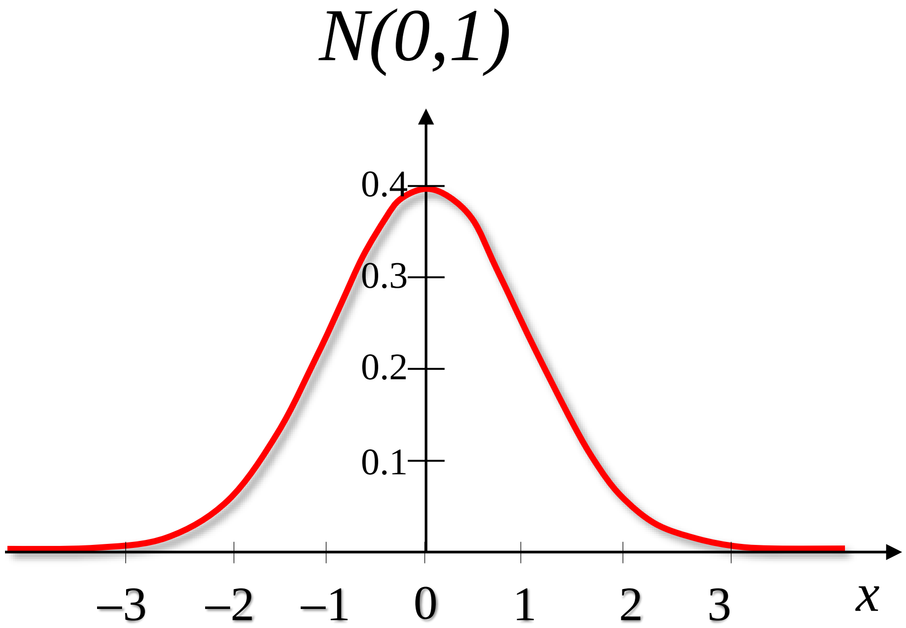
ma esiste una relazione tra σ e la probabilita' ancora piu' importante

dal punto di vista probabilistico

Gaussiana Standard o **Normale** $N(0,1)$

se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ $\quad per\ x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

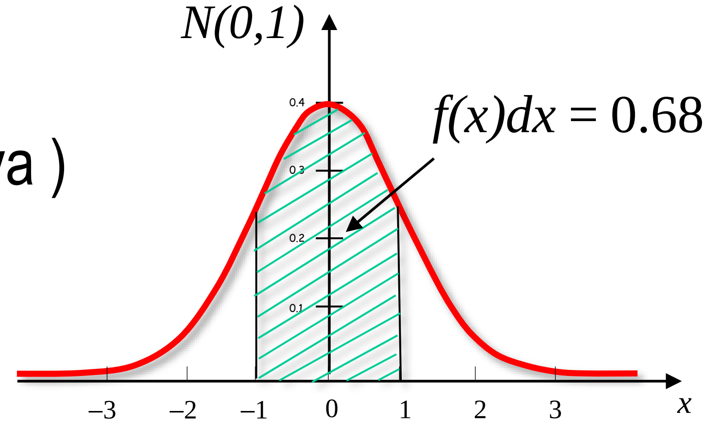


per una qualsiasi gaussiana si ha che

- il **68%** della probabilita' (dell' area sotto la curva)

  e' compresa tra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$

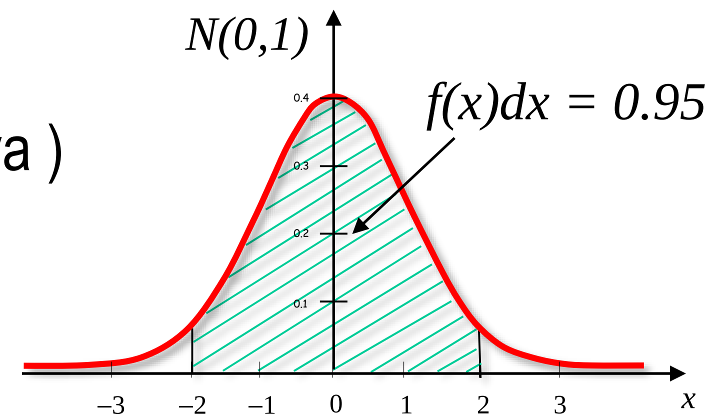
  - tra –1 e +1 per una Normale(0,1)



- il **95%** della probabilita' (dell' area sotto la curva)

  e' compresa tra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$

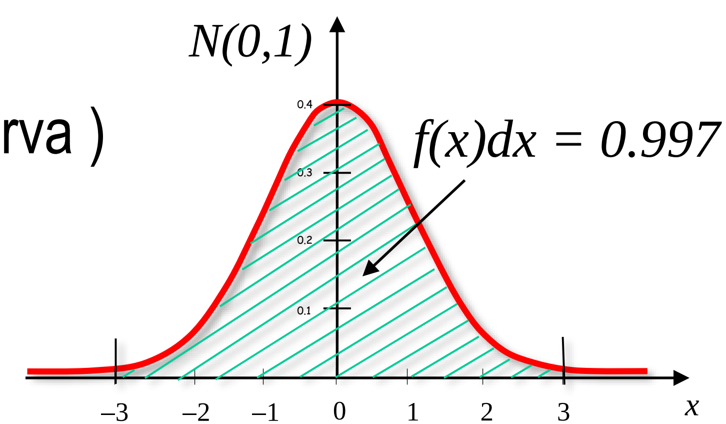
  - tra –2 e +2 per una Normale(0,1)



- il **99.7%** della probabilita' (dell' area sotto la curva)

  e' compresa tra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$

  - tra –3 e +3 per una Normale(0,1)

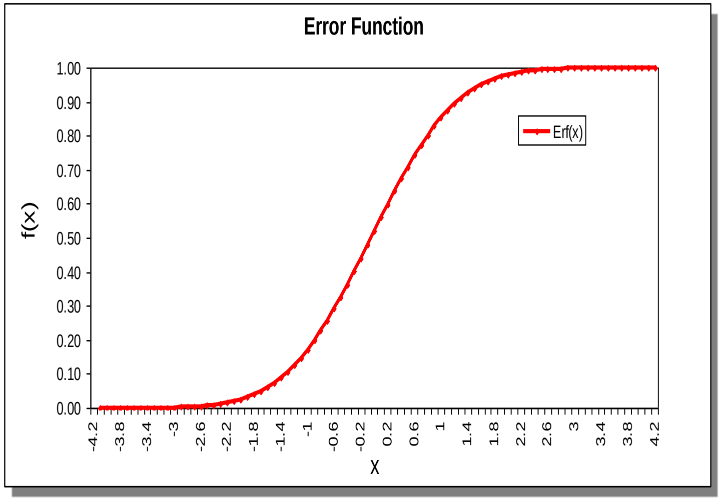


Funzione degli errori

la funzione definita come l'area da $-\infty$ ad un generico punto z

di una gaussiana standard,

$$erf(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$



e' detta "funzione degli errori"

"error function" in inglese, da cui la denominazione erf(z)

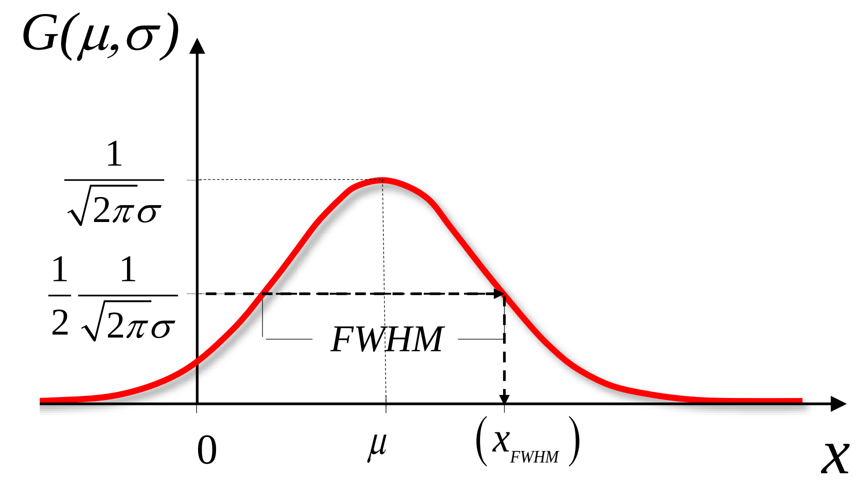
- ➢ altre importanti densita' di probabilita' sono

  la **Chi Quadrato**

  e la **t di Student**

Stima della $r.m.s.$ di una gaussiana: $FWHM$ = *full width half maximum*

se $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$$



$$\Rightarrow \quad f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu-\mu}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_{FWHM}-\mu}{\sigma})^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x_{FWHM}-\mu}{\sigma})^2} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(\frac{x_{FWHM}-\mu}{\sigma})^2$$

$$-2\ln\frac{1}{2} = (\frac{x_{FWHM}-\mu}{\sigma})^2 \Rightarrow 2\ln 2\sigma^2 = \left(x_{FWHM}-\mu\right)^2$$

$\left(x_{FWHM}-\mu\right) = \sqrt{2\ln 2}\ \sigma$ ma $FWHM$ = **<u>intera</u>** larghezza a meta' altezza

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln 2}\ \sigma \simeq 2.36\ \sigma$$

Valor medio della v.a. discreta k Varianza della v.a. discreta k

$$< k > \equiv \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)} \qquad Var(k) \equiv \sigma_k{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (k_i - < k >)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)}$$

ma $\sum_{i=1}^{n} P(k_i) = 1$

$$< k > = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i) \qquad \sigma_k{}^2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i - < k >)^2 \cdot P(k_i)$$

$$\sigma_k{}^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i{}^2 \cdot P(k_i) - \sum_{i=1}^{n} 2 < k > k_i \cdot P(k_i) + \sum_{i=1}^{n} < k >^2 \cdot P(k_i)$$

Nota bene: la variabile aleatoria k puo' assumere **qualunque** valore all'interno del suo dominio di esistenza, ma il valor medio $< k >$ della v.a. k e' un numero ed e' costante percio' puo' essere estratto dalla operazione di sommatoria (fattorizzato)

$$\sigma_k{}^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i{}^2 \cdot P(k_i) - 2 < k > \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i) + < k >^2 \sum_{i=1}^{n} P(k_i)$$

$$\sigma_k^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} k_i^{\ 2} \cdot P(k_i) \quad - 2 < k > \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i) \quad + \ < k >^2 \sum_{i=1}^{n} P(k_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^{\ 2} \cdot P(k_i) \qquad \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i) = \ < k > \qquad \sum_{i=1}^{n} P(k_i) = 1$$

valor medio dei **quadrati** della v.a. k ⇨ $< k^2 >$

valor medio della v.a. k $\ - 2 < k > < k >$

normalizzazione della $P(k)$ $\ + < k >^2 \cdot 1$

$$\sigma_k^{\ 2} = < k^2 > - 2 < k >^2 + < k >^2$$

$$\boxed{Var(k) \equiv \sigma_k^2 = \ < k^2 > - < k >^2}$$

la varianza e' il valor medio dei quadrati della v.a. meno il quadrato del valor medio

$$r.m.s. \equiv \sigma_k = \sqrt{< k^2 > - < k >^2}$$

Nota bene : una struttura matematica simile la ritroveremo nel teorema di Huygens Steiner quando si studiera' il momento d'inerzia di un corpo rigido valor medio della v.a. continua x

$$< x > \equiv \mu = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

se $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

varianza della v.a. x

$$Var(x) \equiv \sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - < x >)^2 f(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - < x >)^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \int_{-\infty}^{+\infty} 2x < x > f(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} < x >^2 f(x)dx$$

Nota bene: la variabile aleatoria x puo' assumere **qualunque** valore all'interno del suo dominio di esistenza, ma il valor medio $< x >$ della v.a. x e' un numero che e' costante e puo' essere estratto dall'integrale

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2 < x > \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx + < x >^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2 <x> \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + <x>^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \, f(x) \, dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f(x) \, dx = <x> \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx = 1$$

valor medio dei **quadrati** della v.a. x $\Rightarrow$ $<x^2>$ — valor medio della v.a. x $-\,2<x><x>$ — normalizzazione della $f(x)$ $+\,<x>^2$

$$<x^2> - 2<x>^2 + <x>^2 = \boxed{<x^2> - <x>^2}$$

la varianza e' il valor medio dei quadrati della v.a. meno il quadrato del valor medio

$$Var(x) \equiv \sigma^2 = <x^2> - <x>^2$$

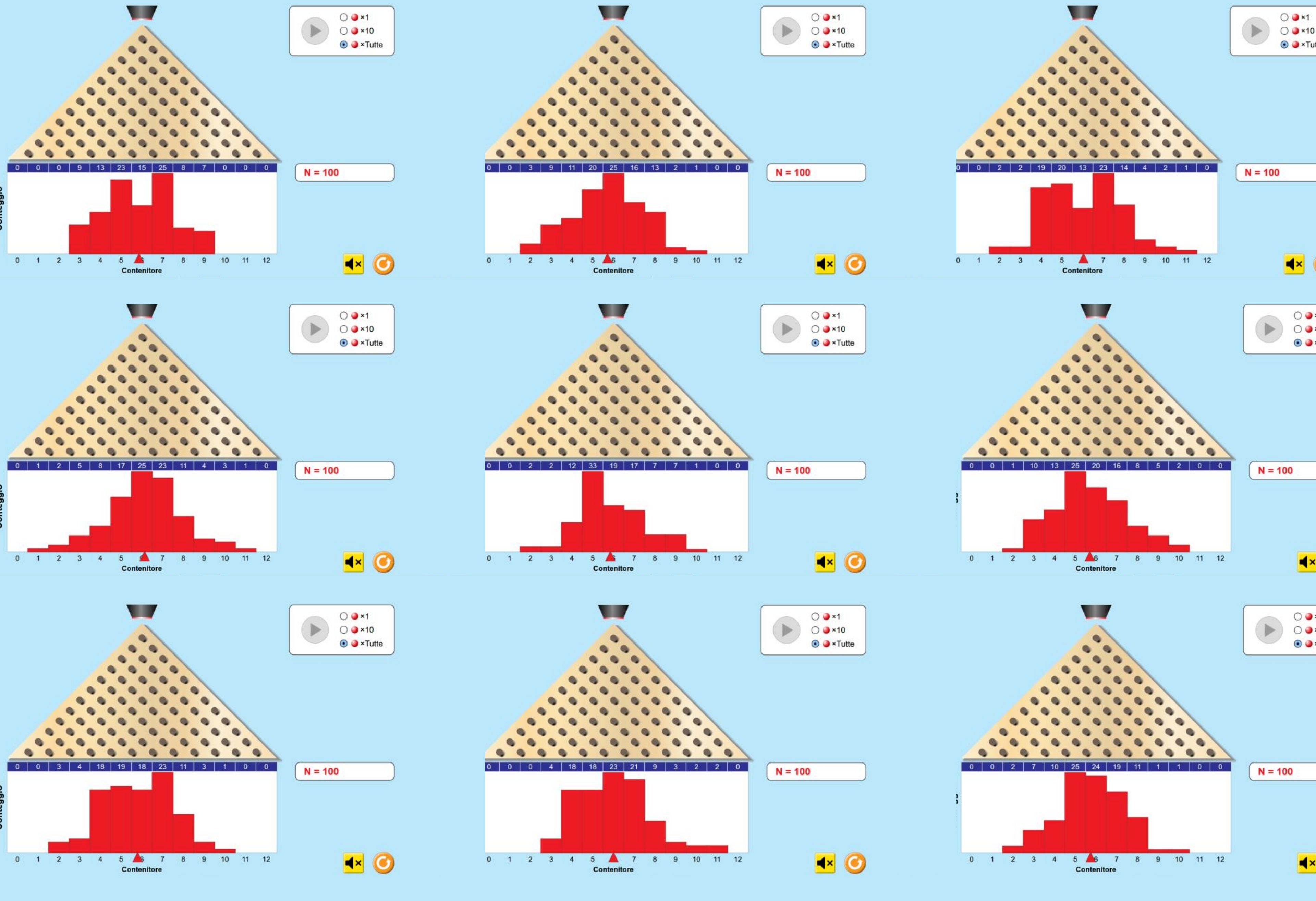
$$r.m.s. \equiv \sigma = \sqrt{<x^2> - <x>^2}$$

importanza della gaussiana :

teorema del limite centrale

https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_it.html

https://www.compadre.org/PQP/quantum-theory/section6_1.cfm


×1
×10
×Tutte
0 0 0 9 13 23 15 25 8 7 0 0 0
N = 100
Contenitore
0 0 3 9 11 20 25 16 13 2 1 0 0
N = 100
Contenitore
0 0 2 2 19 20 13 23 14 4 2 1 0
N = 100
Contenitore
0 1 2 5 8 17 25 23 11 4 3 1 0
N = 100
Contenitore
0 0 2 2 12 33 19 17 7 7 1 0 0
N = 100
Contenitore
0 0 1 10 13 25 20 16 8 5 2 0 0
N = 100
Contenitore
0 0 3 4 18 19 18 23 11 3 1 0 0
N = 100
Contenitore
0 0 0 4 18 18 23 21 9 3 2 2 0
N = 100
Contenitore
0 0 2 7 10 25 24 19 11 1 1 0 0
N = 100
Contenitore

Backup slides