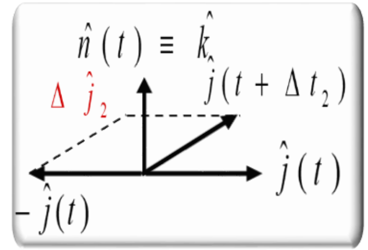
le espressioni della velocita' di trascinamento, dell' accelerazione di Coriolis e dell' accelerazione di trascinamento possono essere semplificate utilizzando le formule di Poisson



$$\vec{v}_T = x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} + \vec{v}_{O_A}$$

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i}$$ etc.

$$\downarrow$$

$$x\ \vec{\omega}\times\hat{i} + y\ \vec{\omega}\times\hat{j} + z\ \vec{\omega}\times\hat{k} + \vec{v}_{O_A}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\omega}\times x\hat{i} + \vec{\omega}\times y\hat{j} + \vec{\omega}\times z\hat{k} + \vec{v}_{O_A}$$

$$\downarrow$$

$$\vec{\omega}\times(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) + \vec{v}_{O_A}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_T = \vec{\omega}\times\vec{r}_{P_R} + \vec{v}_{O_A}}$$

per l'accelerazione di Coriolis si ha

$$\vec{a}_C = 2\dot{x}\frac{d\hat{i}}{dt} + 2\dot{y}\frac{d\hat{j}}{dt} + 2\dot{z}\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\downarrow \qquad \frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{i}$$ etc.

$$2\dot{x}\ \vec{\omega}\times\hat{i} + 2\dot{y}\ \vec{\omega}\times\hat{j} + 2\dot{z}\ \vec{\omega}\times\hat{k}$$

$$\downarrow$$

$$2\vec{\omega}\times\dot{x}\hat{i} + 2\vec{\omega}\times\dot{y}\hat{j} + 2\vec{\omega}\times\dot{z}\hat{k}$$

$$\downarrow$$

$$2\vec{\omega}\times(\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}) = 2\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{v}}_{P_R}$$

$$\downarrow$$

dunque $$\boxed{\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{v}}_{P_R}}$$

derivando rispetto al tempo le relazioni di Poisson

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\hat{i}}{dt}\right) \equiv \frac{d^2\hat{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\hat{i}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\hat{i} + \vec{\omega}\times\frac{d\hat{i}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\times\hat{i} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{i})$$

ossia $$\frac{d^2\hat{i}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}}\times\hat{i} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{i})$$ e analogamente

$$\frac{d^2\hat{j}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}}\times\hat{j} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{j})$$ e $$\frac{d^2\hat{k}}{dt^2} = \dot{\vec{\omega}}\times\hat{k} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{k})$$

e l'accelerazione di trascinamento

$$\vec{a}_T = x\frac{d^2\hat{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\hat{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\hat{k}}{dt^2} + \vec{a}_{O_A}$$

puo' essere riscritta come :

$$\vec{a}_T = x(\dot{\vec{\omega}}\times\hat{i} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{i})) +$$

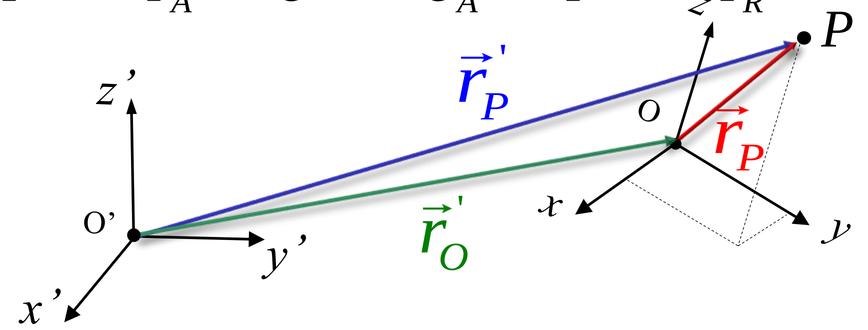
$$y(\dot{\vec{\omega}}\times\hat{j} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{j})) +$$

$$z(\dot{\vec{\omega}}\times\hat{k} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\hat{k})) + \vec{a}_{O_A}$$

dunque $\boxed{\vec{a}_T = \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{P_R} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{P_R}) + \vec{a}_{O_A}}$

ricapitolando:

$$\vec{r}_P{}' \equiv \vec{r}_{P_A} \qquad \vec{r}_O{}' \equiv \vec{r}_{O_A} \qquad \vec{r}_P \equiv \vec{r}_{P_R}$$



$$\boxed{\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}}$$

$$\boxed{\vec{v}_{P_A} = \vec{v}_{P_R} + \vec{v}_{O_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_R}}$$

$$\boxed{\vec{a}_{P_A} = \vec{a}_{P_R} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P_R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P_R}) + \vec{a}_{O_A} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P_R}}$$

ovvero:

$$\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}$$

$$\vec{v}_{P_A} = \vec{v}_{P_R} + \vec{v}_T$$

$$\vec{a}_{P_A} = \vec{a}_{P_R} + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

dove $\vec{v}_T = \vec{v}_{O_A} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_R}$ $\qquad$ $\vec{a}_T = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{P_R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P_R}) + \vec{a}_{O_A}$

e $\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{P_R}$

Backup Slides