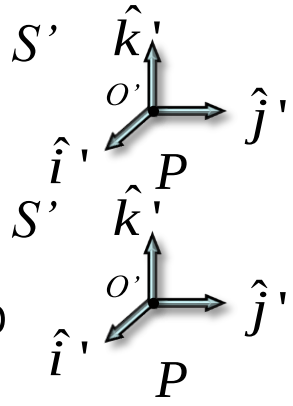
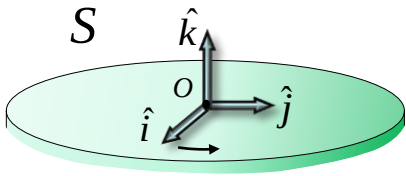
Esempio : giostra in rotazione





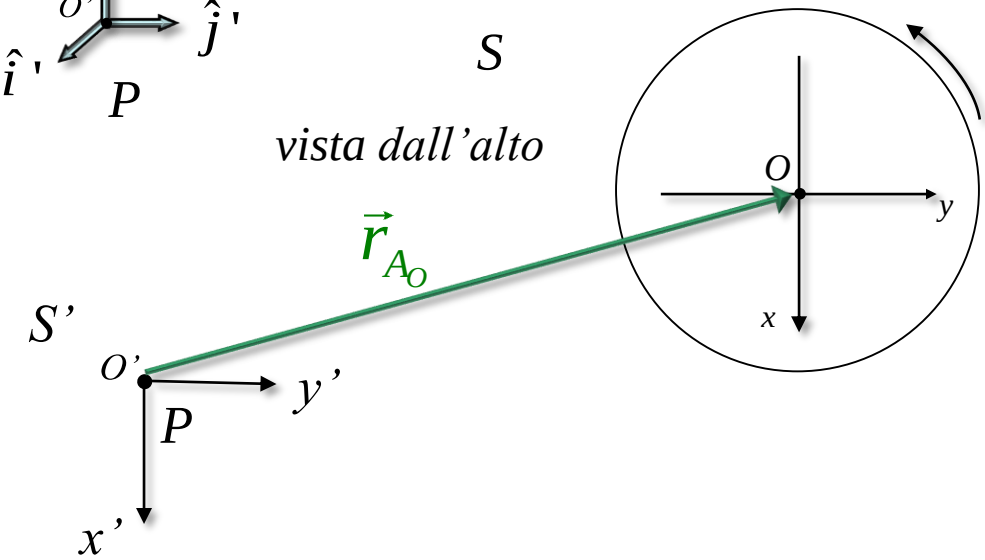
assumendo:

- che all'istante iniziale il punto P sia posto nel centro O' del sistema fisso S'

  ⇨ $\vec{r}_{A_P} = 0$

- che P sia fisso al passar del tempo rispetto all'osservatore solidale con S'

  ⇨ $\vec{v}_{A_P} = 0$ e $\vec{a}_{A_P} = 0$

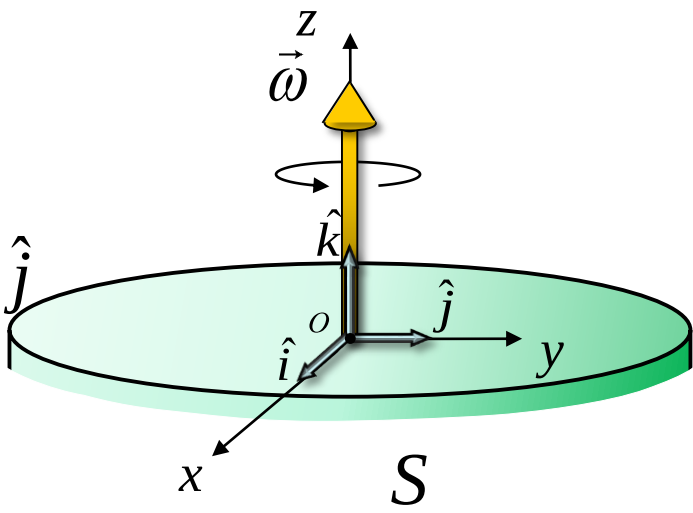


- che l'asse di rotazione della giostra coincida con il centro del sistema mobile S e che l'origine di S rimanga fissa nel tempo rispetto all'origine del sistema fisso S' ossia che si abbia $\vec{r}_{A_O} = costante$ ⇨ $\vec{v}_{A_O} = 0$ e $\vec{a}_{A_O} = 0$
- che la velocita' di rotazione della giostra sia costante ⇨ $\dot{\vec{\omega}} = 0$
- che O e O' siano posti alla stessa altezza rispetto al suolo

determinare la velocita' e l'accelerazione di P rispetto al centro della giostra

in questo caso il vettore omega $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ e' diretto verso l'alto in S

quindi sara' $\vec{\omega} = 0\hat{i} + 0\,\hat{j} + \left(\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} \right) \hat{k}$



dato che $\omega_x = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k} \quad \omega_y = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i} \quad \omega_z = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$

e che in generale si ha $\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{n}$

dove $\frac{d\vartheta}{dt}$ e' la rapidita' con cui ruota il versore $\hat{u}$ (la velocita' angolare di $\hat{u}$)

in questo caso $\hat{u} \equiv \hat{i}$ e il versore $\hat{n}$ coincide con il versore $\hat{j}$

$\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{j}$ e $\left(\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} \right) = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{j} \cdot \hat{j} = \frac{d\vartheta}{dt}$

in conclusione: $\vec{\omega} = 0\hat{i} + 0\,\hat{j} + \frac{d\vartheta}{dt} \hat{k} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{d\vartheta}{dt} \hat{k}$

le equazioni generali di trasformazione sono:

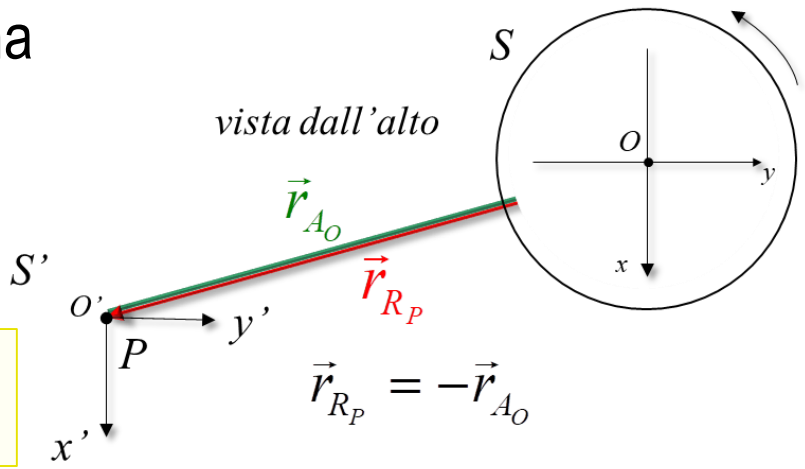
$$\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_O}$$

$$\vec{v}_{A_P} = \vec{v}_{R_P} + \vec{v}_{A_O} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}$$

$$\vec{a}_{A_P} = \vec{a}_{R_P} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{R_P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}) + \vec{a}_{A_O} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{R_P}$$

➢ imponendo le condizioni al contorno $\vec{r}_{A_P} = 0$ $\vec{v}_{A_P} = 0$ $\vec{v}_{A_O} = 0$

$\vec{a}_{A_P} = 0$ $\dot{\vec{\omega}} = 0$ e $\vec{a}_{A_O} = 0$ si ha



$$0 = \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_O} \Rightarrow \boxed{\vec{r}_{R_P} = -\vec{r}_{A_O}}$$

$$0 = \vec{v}_{R_P} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{R_P} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}}$$

$$0 = \vec{a}_{R_P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{R_P}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_{R_P} = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{R_P}) - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{R_P}}$$

$$\vec{a}_{R_P} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_P}) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{R_P}$$

↓ si e' trovato che $\vec{v}_{R_P} = -\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_P}$

$$-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_P}) + 2\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_P})$$

↓

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_P})$$

$\vec{a}\quad\vec{b}\quad\vec{c}$

↓ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

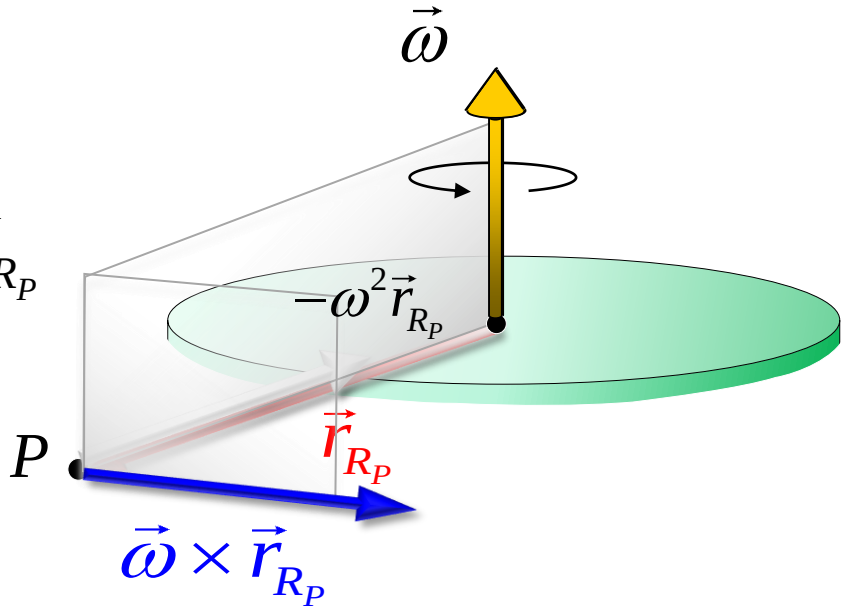
$$(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{R_P})\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}_{R_P}$$

↓ $(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_{R_P}) = 0$ dato che $\vec{\omega}$ e' perpendicolare a $\vec{r}_{R_P}$

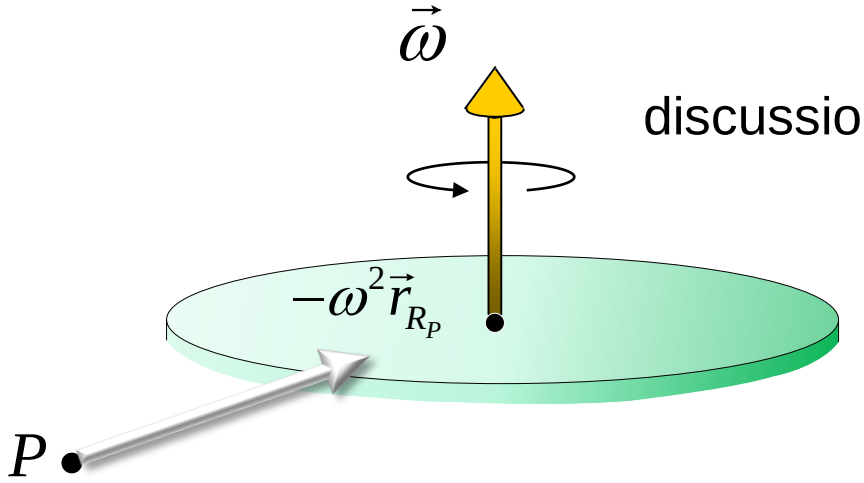
$$0 - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\vec{r}_P = -\omega^2\vec{r}_{R_P}$$

in conclusione $\vec{a}_{R_P} = -\omega^2\vec{r}_{R_P}$

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_P}) \equiv ? -\omega^2\vec{r}_{R_P}$$

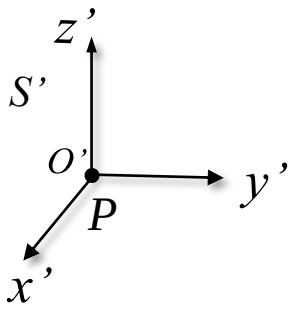


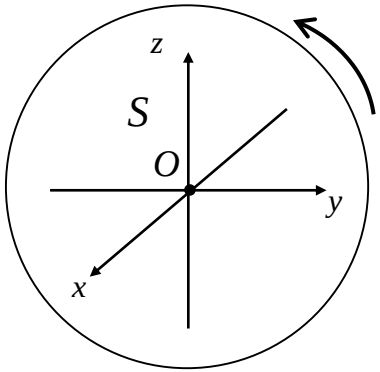
$$\vec{a}_{R_P} = -\omega^2\vec{r}_{R_P}$$



discussione del segno meno

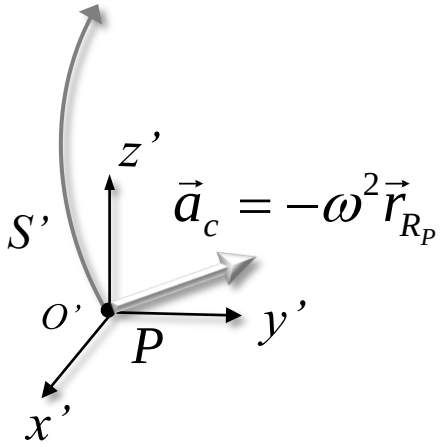
punto di vista di S'

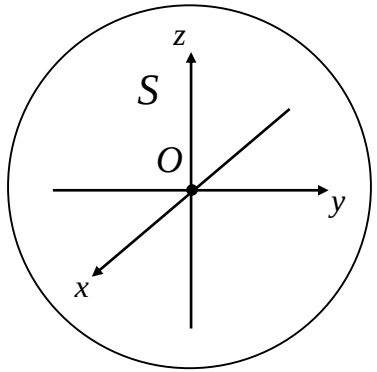




l'osservatore posto in O' e' solidale con S' e vede S' fermo, e quindi P, fermo dunque sostiene che sia il sistema S a ruotare attorno ad un asse fisso

punto di vista di S





l'osservatore posto in O e' solidale con S e vede S fermo dunque sostiene che sia il sistema S', e quindi P, a ruotare attorno ad O lungo una traiettoria circolare e questo comporta la presenza di una accelerazione centripeta

Attenzione: le relazioni vettoriali hanno validita' intrinseca ossia sono vere qualunque sistema di riferimento si scelga, ma le relazioni tra le **componenti** dei vettori non sono indipendenti dal sistema di riferimento

ad es. la relazione vettoriale $\vec{r}_{P_A} = \vec{r}_{P_R} + \vec{r}_{O_A}$ ossia la

$$x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}' = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k} + x'_O\hat{i}' + y'_O\hat{j}' + z'_O\hat{k}'$$

o piu' esplicitamente :

$$x_{A_P}\hat{i}' + y_{A_P}\hat{j}' + z_{A_P}\hat{k}' = x_{R_P}\hat{i} + y_{R_P}\hat{j} + z_{R_P}\hat{k} + x_{A_O}\hat{i}' + y_{A_O}\hat{j}' + z_{A_O}\hat{k}'$$

implica che

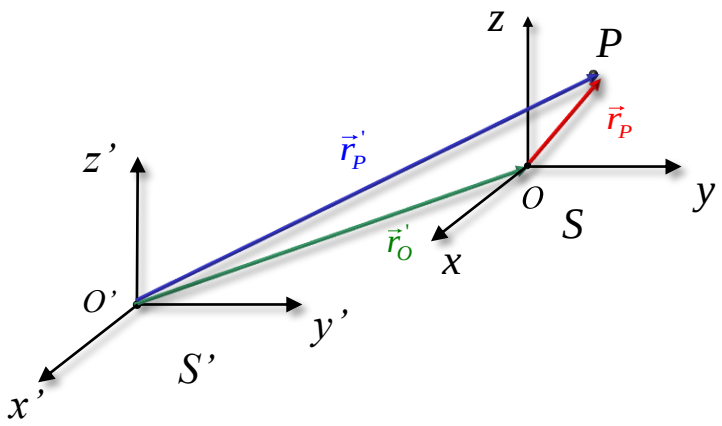
$$x_{A_P}\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i} + x_{A_O}\hat{i}'$$

$$y_{A_P}\hat{j}' = y_{R_P}\hat{j} + y_{A_O}\hat{j}'$$

$$z_{A_P}\hat{k}' = z_{R_R}\hat{k} + z_{A_O}\hat{k}'$$

se S ed S' avessero gli assi **paralleli**

→ $\hat{i} \equiv \hat{i}' \quad \hat{j} \equiv \hat{j}' \quad \hat{k} \equiv \hat{k}'$



$$x_{A_P}\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i} + x_{A_O}\hat{i}'$$

le $\quad y_{A_P}\hat{j}' = y_{R_P}\hat{j} + y_{A_O}\hat{j}'$ diverrebbero

$$z_{A_P}\hat{k}' = z_{R_P}\hat{k} + z_{A_O}\hat{k}'$$

$$x_{A_P}\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i}' + x_{A_O}\hat{i}' \qquad x_{A_P} = x_{R_P} + x_{A_O}$$

$$y_{A_P}\hat{j}' = y_{R_P}\hat{j}' + y_{A_O}\hat{j}' \quad \Rightarrow \quad y_{A_P} = y_{R_P} + y_{A_O}$$

$$z_{A_P}\hat{k}' = z_{R_P}\hat{k}' + z_{A_O}\hat{k}' \qquad z_{A_P} = z_{R_P} + z_{A_O}$$

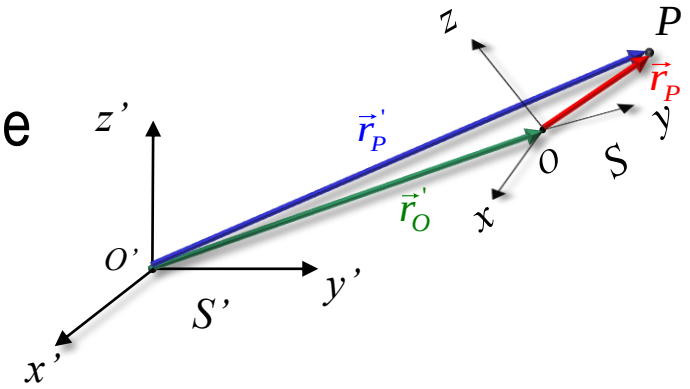
quindi se S ed S' avessero gli assi **paralleli** la relazione vettoriale

$\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_O}$ implicherebbe tre semplici relazioni per le proiezioni sugli assi ossia che

$$x_{A_P} = x_{R_P} + x_{A_O}$$
$$y_{A_P} = y_{R_P} + y_{A_O}$$
$$z_{A_P} = z_{R_P} + z_{A_O}$$

ma se i due sistemi fossero **ruotati** uno rispetto all'altro

$$x_{A_P}\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i} + x_{A_O}\hat{i}'$$ ***non implicherebbe*** che



$$x_{A_P} = x_{P_R} + x'_{A_O}$$

perche' in questo caso $\hat{i} \neq \hat{i}'$ e analogamente

per le relazioni $y_{A_P}\hat{j}' = y_{R_P}\hat{j} + y_{A_O}\hat{j}'$ e $z_{A_P}\hat{k}' = z_{R_P}\hat{k} + z_{A_O}\hat{k}'$

per semplicita' consideriamo un caso di rotazione solo rispetto all'asse z

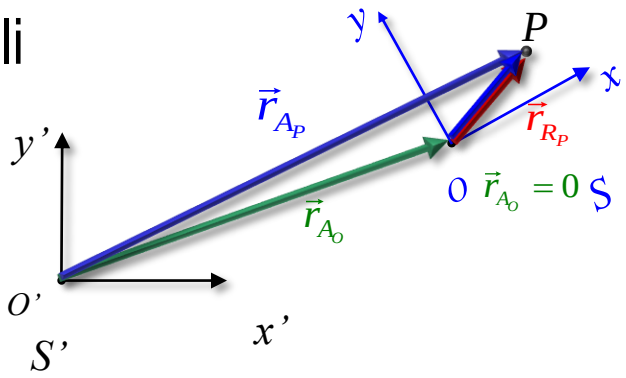
e consideriamo il caso piu' semplice possibile in cui $\vec{r}_{A_O} = 0$

ossia il caso in cui le origini dei due sistemi di riferimento coincidano

se $\vec{r}_{A_O} = 0$ la $\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_O}$ diviene $\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P}$

il che significa che i due vettori posizione sono uguali

e cio' e' evidente dall' animazione a fianco



e se $\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P}$ si ha che $x_{A_P}\hat{i}' + y_{A_P}\hat{j}' + z_{A_P}\hat{k}' = x_{R_P}\hat{i} + y_{R_P}\hat{j} + z_{R_P}\hat{k}$

e questo implica che $x_{A_P}\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i}$ $y_{A_P}\hat{j}' = y_{A_P}\hat{j}$ etc.

ma se gli assi sono ruotati cio' **non implica** che $x_{A_P} = x_{R_P}$ etc.

perche se gli assi sono ruotati il versore $\hat{i}'$ e' diverso da $\hat{i}$

il versore $\hat{j}'$ e' diverso da $\hat{j}$ etc.

se si moltiplicano scalarmente per $\hat{i}'$ ambo i membri della $\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P}$

$$x_{A_P}\hat{i}'\cdot\hat{i}' + y_{A_P}\hat{j}'\cdot\hat{i}' + z_{A_P}\hat{k}'\cdot\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i}\cdot\hat{i}' + y_{R_P}\hat{j}\cdot\hat{i}' + z_{R_P}\hat{k}\cdot\hat{i}'$$

dato che $\hat{i}'\cdot\hat{i}' = 1$ $\hat{i}'\cdot\hat{j}' = \hat{j}'\cdot\hat{i}' = 0$ e $\hat{i}'\cdot\hat{k}' = \hat{k}'\cdot\hat{i}' = 0$

riesce $x_{A_P} = x_{R_P}\hat{i}\cdot\hat{i}' + y_{R_P}\hat{j}\cdot\hat{i}' + z_{R_P}\hat{k}\cdot\hat{i}'$

$$x_{A_P} = x_{R_P}\hat{i}\cdot\hat{i}' + y_{R_P}\hat{j}\cdot\hat{i}' + z_{R_P}\hat{k}\cdot\hat{i}'$$

Nota bene : se si ha una rotazione attorno alla verticale l'asse z ' concidera'

con l'asse z e $\hat{k}\cdot\hat{i}' \equiv \hat{k}'\cdot\hat{i}' = 0$ quindi $x_{A_P} = x_{R_P}\hat{i}\cdot\hat{i}' + y_{R_P}\hat{j}\cdot\hat{i}'$

ma $\hat{i}\cdot\hat{i}' \neq 1$ e $\hat{j}\cdot\hat{i}' \neq 0$ dunque $x_{A_P} \neq x_{R_P}$

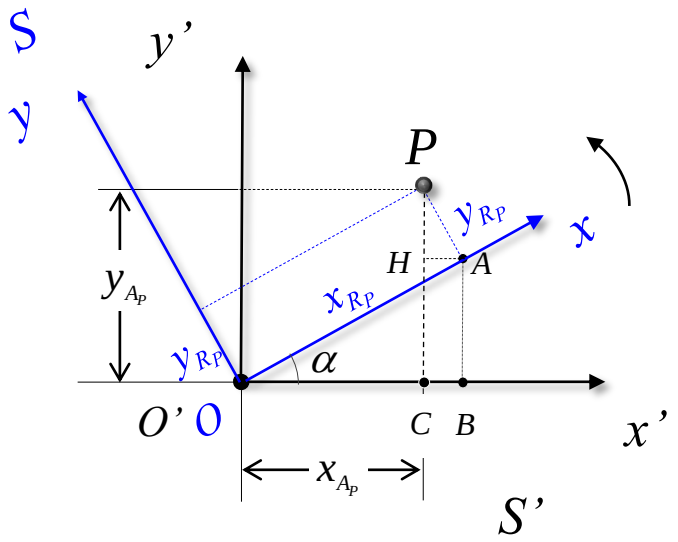
- quando si considerano sistemi ruotati tra loro la proiezione sull'asse x

(o su y, o su z) della posizione di un punto P come vista nel sistema fisso S'

non e' necessariamente uguale alla proiezione dello stesso punto P

dello spazio come vista dal sistema S

in caso di rotazione antioraria attorno all'asse z



se $\vec{r}_{A_O} = 0$ ossia se O e O' coicidono

⇨ $x_{A_O} = 0$ e $y_{A_O} = 0$

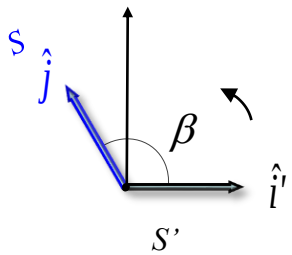
per cui $x_{A_P}\hat{i}' = x_{R_P}\hat{i}$ e $y_{A_P}\hat{i}' = y_{R_P}\hat{i}$

$$x_{A_P} \equiv CO = BO' - BC = BO' - AH \Rightarrow x_{A_P} = x_{R_P}\cos(\alpha) - y_{R_P}\,sen(\alpha)$$

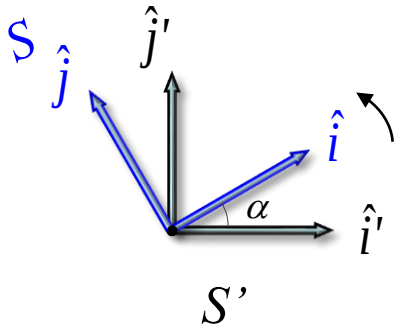
$$y_{A_P} \equiv PC = HC + PH = AB + PH \Rightarrow y_{A_P} = x_{R_P}\,sen(\alpha) + y_{R_P}\cos(\alpha)$$

in termini di versori $\hat{i}' \cdot \hat{i} = \cos(\alpha)$ e $\hat{i}' \cdot \hat{j} = -sen(\alpha)$

in effetti $\hat{i}' \cdot \hat{j} = \cos(\beta)$ ma $\beta = 90 + \alpha$



e $\cos(90+\alpha) = -sen(\alpha)$



il tutto e'piu' facilmente esprimibile in termini di prodotto di matrici

$$\begin{bmatrix} x_{A_P} \\ y_{A_P} \\ z_{A_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{R_P} \\ y_{R_P} \\ z_{R_P} \end{bmatrix}$$

rotazione attorno all'asse z

$$\mathrm{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} cos(\alpha) & -sen(\alpha) & 0 \\ sen(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

rotazione attorno all'asse y

$$\mathrm{R}_z(\beta) = \begin{bmatrix} cos(\beta) & 0 & sen(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sen(\beta) & 0 & cos(\beta) \end{bmatrix}$$

rotazione attorno all'asse x

$$\mathrm{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\gamma) & -sen(\gamma) \\ 0 & sen(\gamma) & cos(\gamma) \end{bmatrix}$$

Backup Slides