Lavoro meccanico

se $d\vec{l}$ e' lo spostamento infinitesimo del punto di applicazione di una forza $\vec{F}$

si definisce *lavoro infinitesimo* effettuato dalla forza $dL = \vec{F} \cdot d\vec{l}$

in generale $\vec{F}$ puo essere variabile nello spazio (e nel tempo)

percio' se lo spostamento

→ e' finito e avviene dal punto A al punto B dello spazio

→ si svolge lungo un determinato percorso Γ

$$\Rightarrow \quad L_{A\to B} = \int_{\substack{A \\ lungo\ \Gamma}}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

in termini matematici, il lavoro e' l' ***integrale di linea*** della forza lungo il percorso Γ

$$L(A \rightarrow B \textit{ lungo la linea } \Gamma) = \int_{A \atop \textit{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

se la linea e' chiusa si parla di **circuitazione**

$$L(A \rightarrow B \textit{ lungo un percorso chiuso}) = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- *il lavoro e' una quantita' scalare*

unita' di misura del lavoro nel S.I. e' il Joule (Newton metro)

Nota Bene : $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ il momento angolare $\vec{L}$ e’ una grandezza vettoriale

$L = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$ il lavoro L e’ una grandezza scalare

Lavoro ed energia cinetica : $L(A \to B \text{ lungo la linea } \Gamma) = \int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$\boxed{\vec{F} \cdot d\vec{l}}$$

$\downarrow$ per la definizione generalizzata di forza $\vec{F} = \dfrac{d\vec{q}}{dt}$ fisica

$$\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot d\vec{l}$$

$\downarrow$ il differenziale $d\vec{l}$ di $\vec{l}$ e' $\dfrac{d\vec{l}}{dt}dt$ ma $\dfrac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow d\vec{l} = \vec{v}dt$ matematica

$$\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{v}dt$$

$\downarrow$ moltiplicando e dividendo per la massa m matematica

$$\frac{1}{m}\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot (m\vec{v})dt = \frac{1}{m}\frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q}dt$$

$\downarrow$ ma $\dfrac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \dfrac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \dfrac{d\vec{b}}{dt} \cdot \vec{a}$ e se $\vec{a} = \vec{b} \equiv \vec{q}$

$$\frac{d(\vec{q} \cdot \vec{q})}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q} + \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q} \Rightarrow \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{q} = \frac{1}{2}\frac{d(\vec{q} \cdot \vec{q})}{dt}$$

matematica

$$\frac{1}{2m}\frac{d(\vec{q} \cdot \vec{q})}{dt}dt$$

$\downarrow$ il differenziale $d(\vec{q} \cdot \vec{q})$ della funzione $(\vec{q} \cdot \vec{q})$

per definizione e' $\dfrac{d(\vec{q} \cdot \vec{q})}{dt}dt$ matematica

$$\frac{1}{2m}d(\vec{q} \cdot \vec{q})$$

$\downarrow$

$$\int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \frac{1}{2m} d(\vec{q} \cdot \vec{q})$$

il lavoro e' l' ***integrale di linea*** della forza lungo il percorso Γ

$$L(A \to B \text{ lungo la linea } \Gamma) = \int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

matematica

ma $\vec{q} \cdot \vec{q} = |\vec{q}\,|^2 \equiv q^2$

$$\frac{1}{2m} q^2 \Big|_A^B$$

<u>Nota Bene</u>: q^2 non dipende dall'<u>orientamento</u> del vettore $\vec{q}$ nello spazio lungo il percorso ma soltanto dal <u>modulo quadrato</u> → dall'intensita' del vettore $\vec{q}$

matematica

ma $q^2 = m^2 \mathrm{v}^2$

$$\frac{1}{2m} m^2 \, \mathrm{v}^2 \Big|_A^B$$

$$L(A \to B) = \int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} m\mathrm{v}_B^2 - \frac{1}{2} m\mathrm{v}_A^2$$

<u>qualunque sia il percorso Γ</u>

matematica

teorema delle forze vive

Teorema dell'energia cinetica (o delle "forze vive")

$$L_{A\to B} = \int_{A \atop lungo\ \Gamma}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2$$ **qualunque** sia il percorso Γ

posto $E_C = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$ si ha $L_{A\to B} = E_{C_B} - E_{C_A}$

significato fisico ?

teorema sempre valido se la massa e' costante

la grandezza scalare E_c e' l' **energia cinetica**

unita' di misura della energia nel S.I. e' il Joule

Backup slides