Energia dell’oscillatore armonico unidimensionale

$$\left|\vec{F}\right| = F = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{dove} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

la soluzione è una funzione armonica del tipo $x(t) = Asen(\omega t + \varphi)$

per cui $\mathrm{v}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

la forza elastica è conservativa dunque l’ ***energia meccanica*** sara’ costante durante il moto

$$E_c(t) = \tfrac{1}{2} m\mathrm{v}^2(t) = \tfrac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p(t) = \tfrac{1}{2} kx^2(t) = \tfrac{1}{2} kA^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

l'energia meccanica e':

$$E_m = E_c + E_p = \tfrac{1}{2} kA^2 = \tfrac{1}{2} m\omega^2 A^2 = cost$$

in assenza di forze dissipative l'energia meccanica dell'oscillatore armonico e'

→ una costante del moto e vale

$$E_M = \frac{1}{2} m\ \omega^2 A^2 \qquad \text{con} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

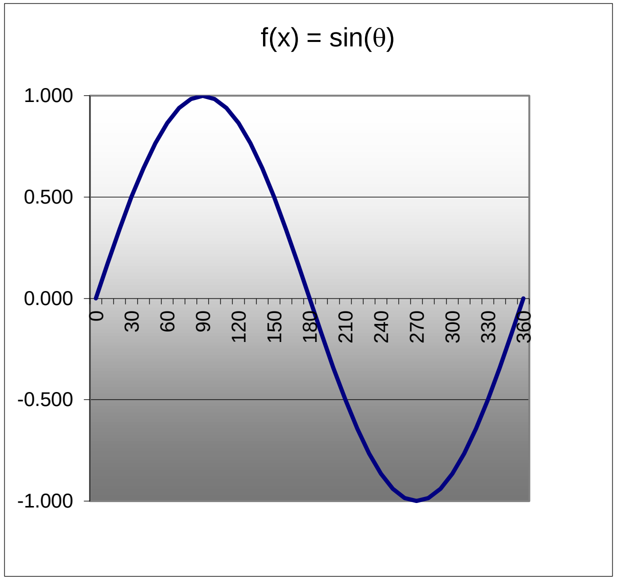
Valor medio durante un periodo

il valore medio di una funzione in un intervallo $[x_1,x_2]$ e'

$$f_m = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

la media su di un periodo della funzione seno (coseno) e' zero

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sen\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi}(-\cos\vartheta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

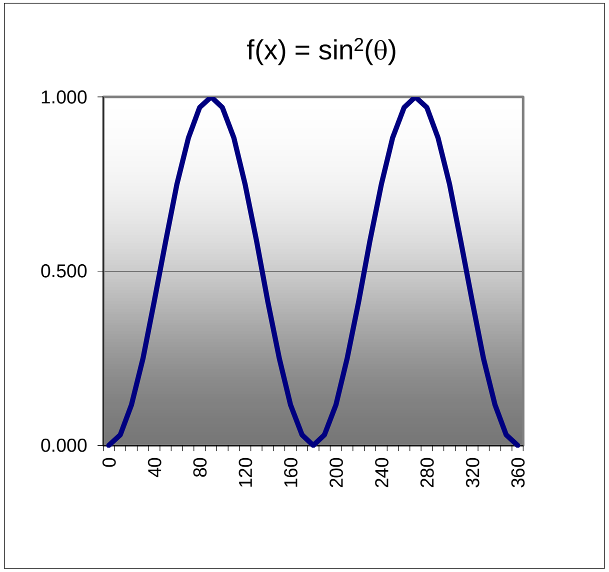


la media su di un periodo della funzione seno al quadrato (coseno al quadrato) vale 1/2

$$\int sen^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta - sen\vartheta\cos\vartheta) + C$$

$$\int \cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta + sen\vartheta\cos\vartheta) + C$$

$\Rightarrow$ $$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}$$



Backup slides