Determinare il momento d'inerzia, rispetto ad un asse passante per il centro

di una sfera di raggio R, massa totale M e di densita' volumetrica

di massa ρ costante ovunque.

data la simmetria del problema opereremo in coordinate polari sferiche

consideriamo una sfera di raggio r generico con [0 < r < R]

e un volumetto infinitesimo dV di area di base dS e di altezza dr

in coordinate polari sferiche il volume dV si esprime come

$$dV = r^2 dr sen\vartheta d\vartheta d\varphi$$

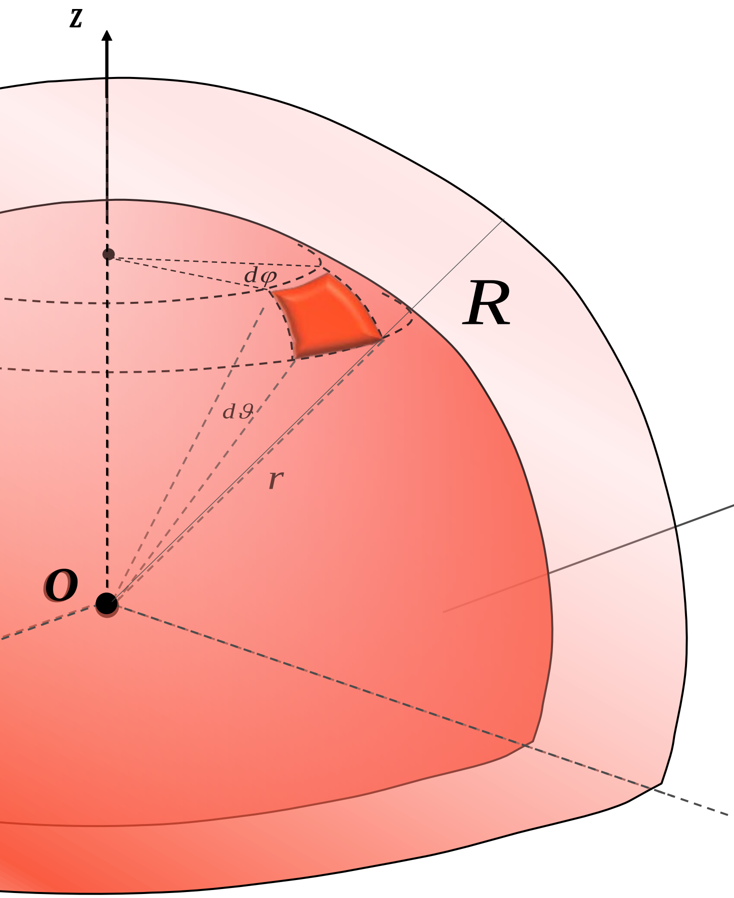
consideriamo un guscio sferico di spessore infinitesimo dr

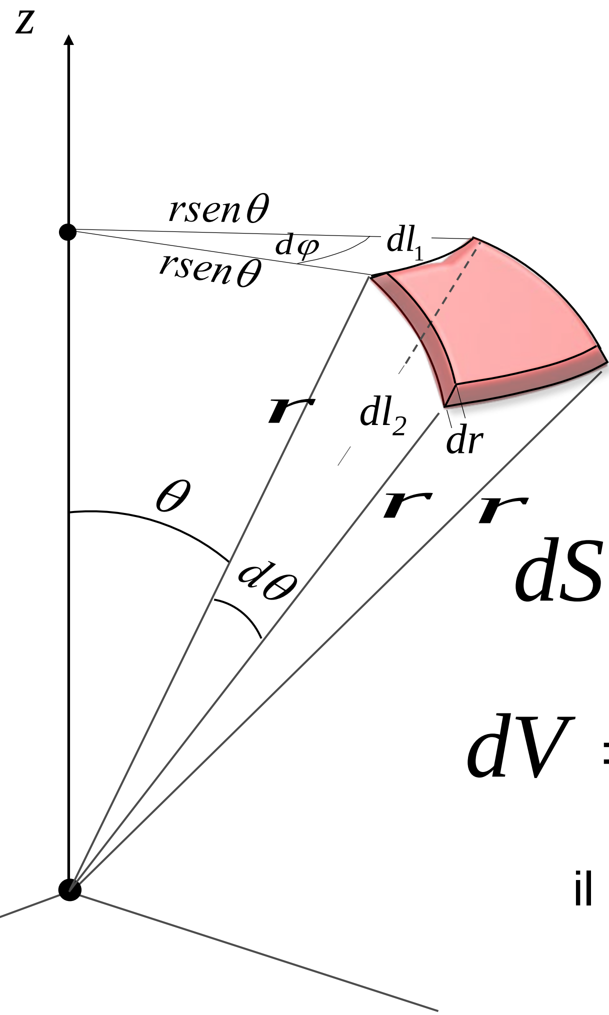
di raggio generico r

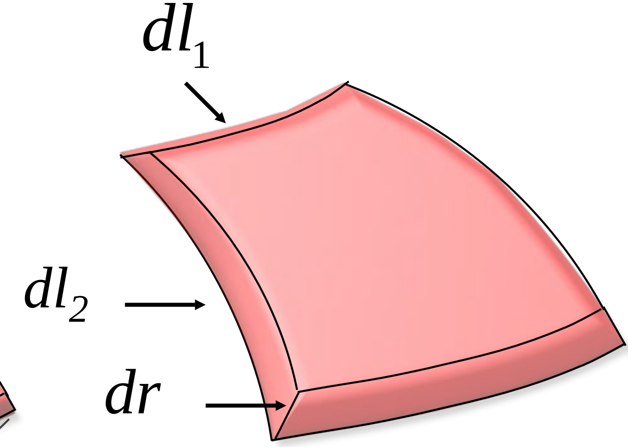
concentrico ad una sfera

piena di raggio R

con $[\, 0 < r < R \,]$







$$dS = r^2 sen\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$dV = r^2 sen\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

il momento d'inerzia e'

$$I_z = \int (r sen\vartheta)^2\, dm$$

dove $dm = \rho dV$ quindi

$$I_z = \iiint r^2 sen^2\vartheta \rho (r^2 dr sen\vartheta d\vartheta d\varphi)$$

$$= \rho \iiint r^4 sen^3\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

dunque $$I_z = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 dr sen^3\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi sen^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi\rho \frac{R^5}{5} \int_0^\pi sen^3\vartheta d\vartheta$$

ma $$\int_0^\pi sen^3\vartheta d\vartheta = -\int_1^{-1} (1-\cos^2\vartheta) d\cos\vartheta = \frac{4}{3}$$

per cui $$I_z = \frac{2\pi}{5}\frac{4}{3}\rho R^5$$

per determinare ρ si ragiona nel modo seguente :

il volume della sfera e' $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e dato che la massa

e' distribuita in maniera uniforma entro la sfera $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

per cui $I_z = \frac{2\pi}{5}\frac{4}{3}\rho R^5 = \frac{2\pi}{5}\frac{4}{3}\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}R^5 = \frac{2}{5}MR^2$

in conclusione: $I_z = \frac{2}{5}MR^2$

Backup Slides