Un' asta omogenea di massa M e lunghezza L e' vincolata ad un estremo in un

punto A ed e' tenuta orizzontalmente da una fune collegata all'altro estremo B

perpendicolarmente all'asta stessa.

Ad una distanza $L/3$ dall'estremo A e' applicata una forza $\vec{F} = -F\hat{j}$

perpendicolare all'asta e diretta verso il basso nel sistema della sbarretta .

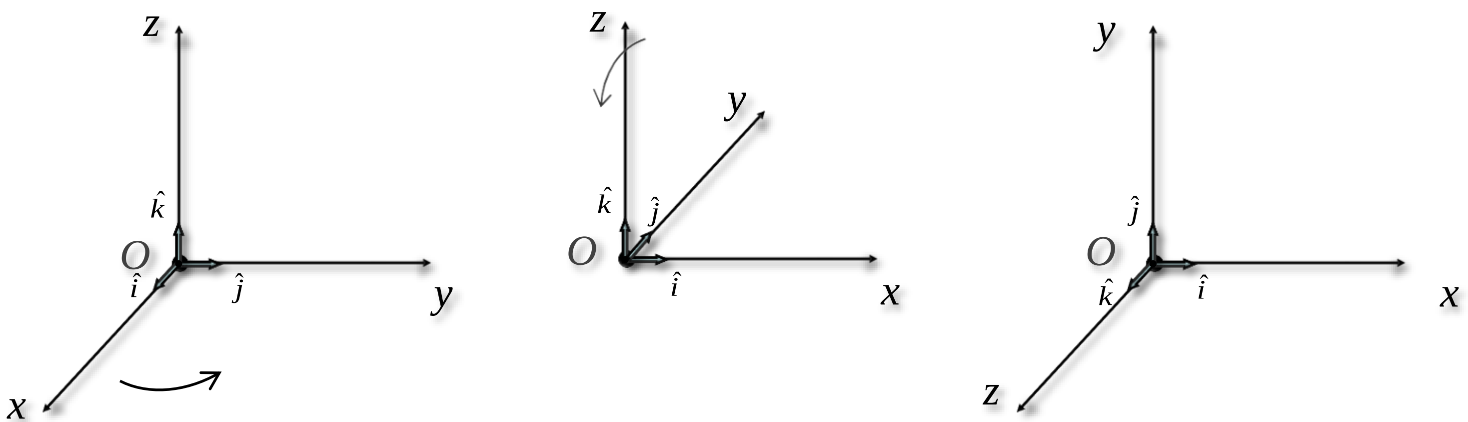
Calcolare le espressioni della reazione vincolare nel punto A

e della tensione della fune.

Se a un certo istante la fune si spezzasse determinare l'accelerazione angolare

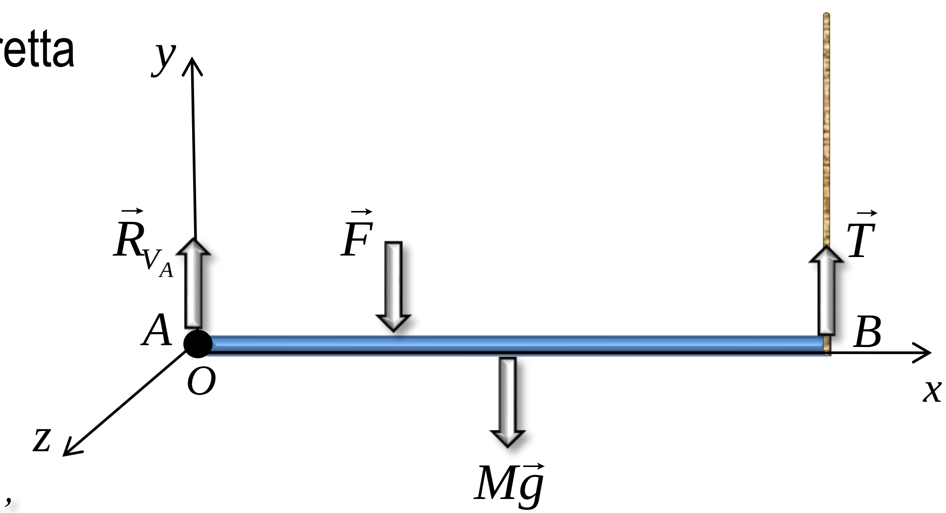
a cui sarebbe soggetta l'asta nell'istante immediatamente successivo alla rottura.

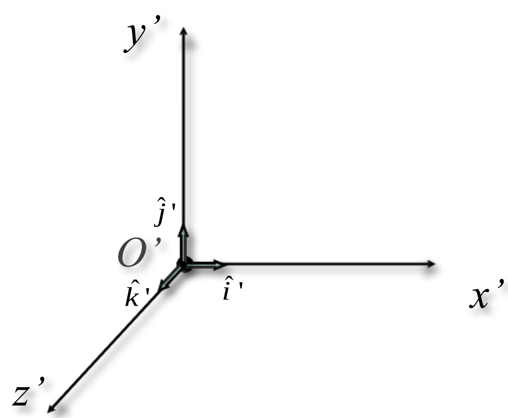
se $\vec{F} = -F\hat{j}$ e' diretta verso il basso nel sistema di riferimento della sbarretta



senza perdere in generalita' possiamo ruotare gli assi del sistema fisso

fino ad allinearli parallelamente alla sbarretta





posto $R_{V_A} = \left|\vec{R}_{V_A}\right| \quad F = \left|\vec{F}\right| \quad P = \left|\vec{P}\right| \quad T = \left|\vec{T}\right|$ si ha

$$\vec{R}_{V_A} = R_{V_A}\,\hat{j} \qquad \vec{F} = -F\hat{j} \qquad \vec{P} = -Mg\hat{j} \qquad \vec{T} = T\hat{j}$$

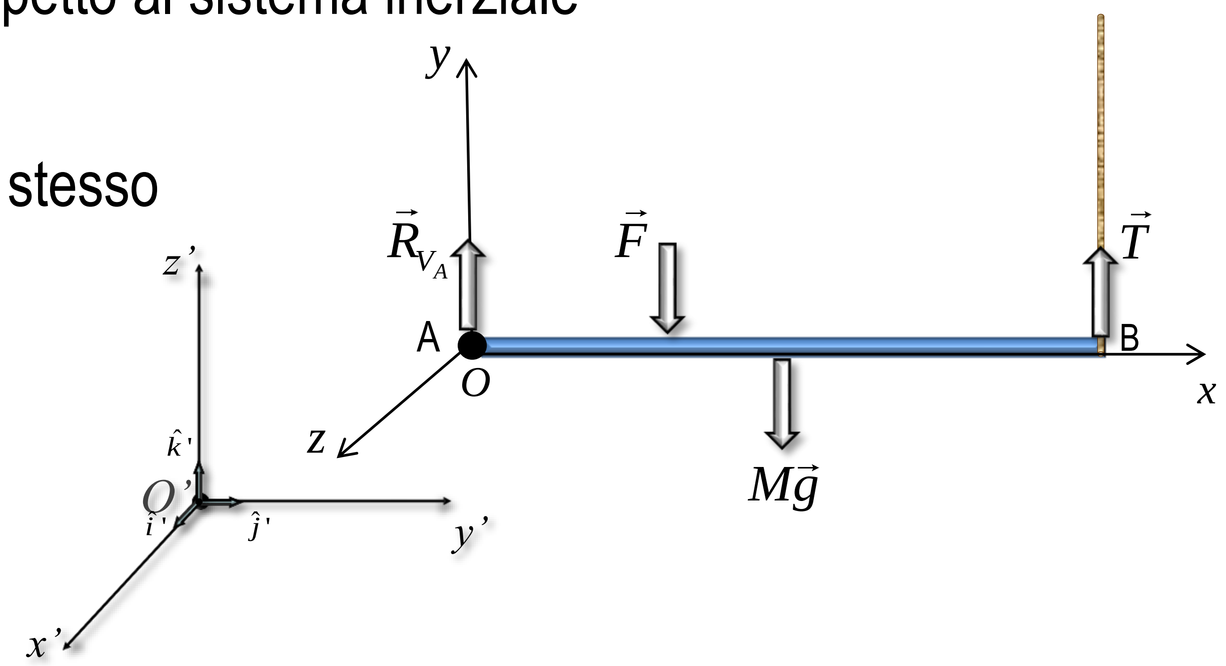
la forza peso e' applicata al centro di massa dell'asta che coincide con il suo

punto di mezzo dato che la massa e' distribuita in modo omogeneo sull'asta

poiche' A e' un punto fisso rispetto al sistema inerziale

conviene scegliere il punto A stesso

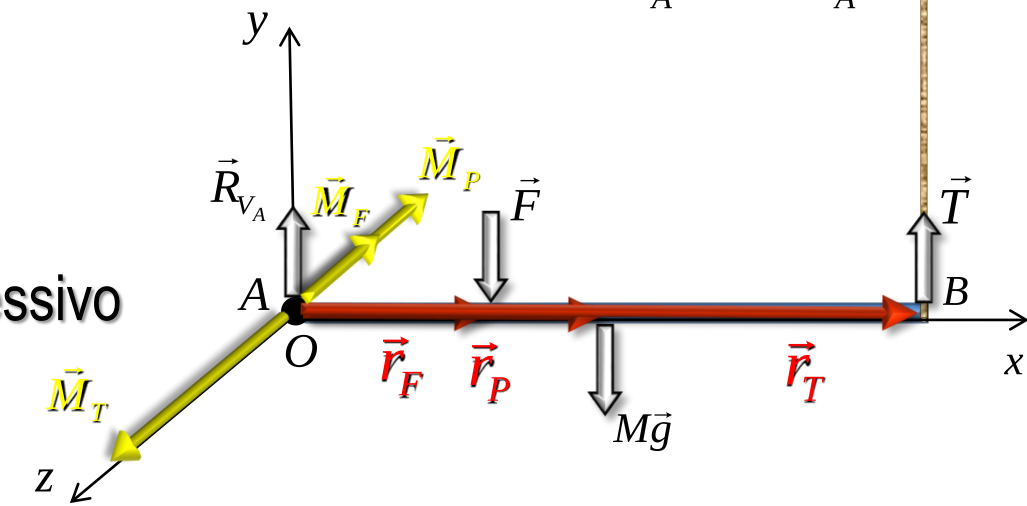
come polo fisso



i momenti rispetto al polo fisso A delle forze agenti sono :

$$\vec{M}_T = \vec{r}_T \times \vec{T} \quad \vec{M}_P = \vec{r}_P \times \vec{P} \quad \vec{M}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} \quad \text{e} \quad \vec{M}_{R_{V_A}} = \vec{r}_{R_{V_A}} \times \vec{R}_{V_A}$$

ma $\quad \vec{r}_{R_{V_A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{R_{V_A}} = 0$

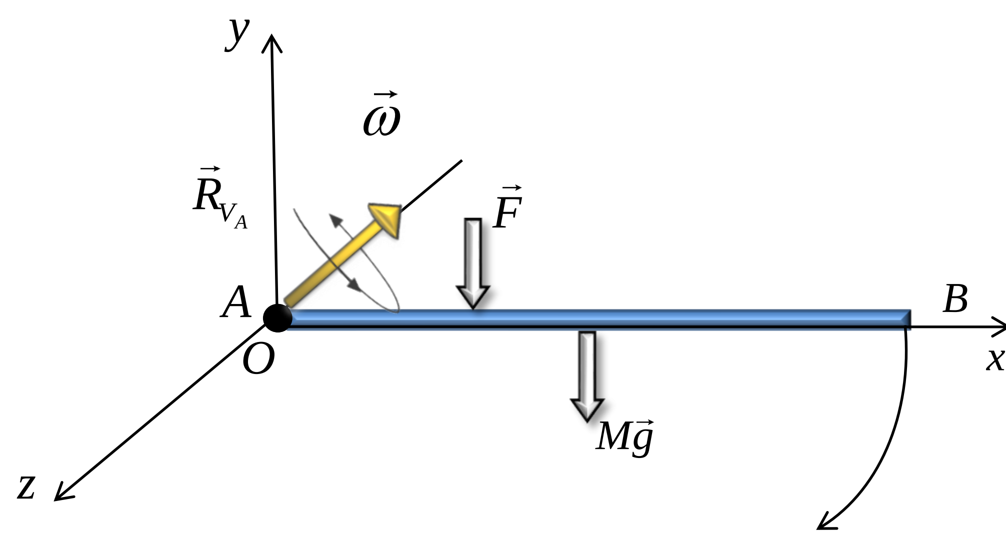


- nell'istante immediatamente successivo

  alla rottura della fune

  l'asta iniziera' a ruotare verso il

  basso nel piano xy

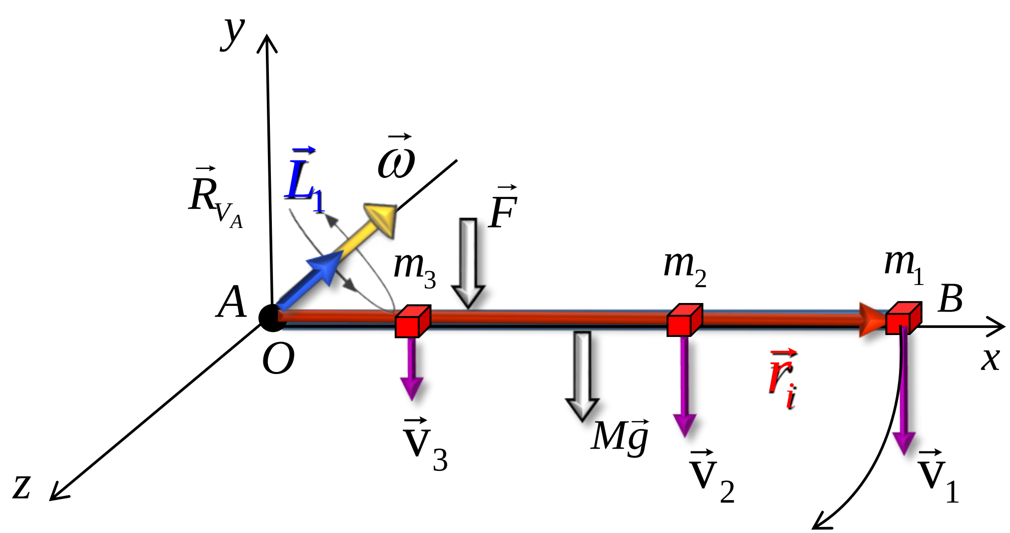


$$\rightarrow \quad \vec{\omega}(t) = -\omega(t)\hat{k}$$

la velocita' dell' i-esimo punto sara' $\vec{\mathrm{v}}_i = -\mathrm{v}_i\,\hat{j}$ e il momento angolare

dell' i-esimo punto $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$ sara' diretto come $\vec{\omega}$

→ questo rimarra' vero per tutti i punti della sbarretta



in conclusione: il momento angolare totale $\vec{L}$ sara' parallelo ad $\vec{\omega}$

e dato che il momento d'inerzia e' costante

$$\vec{M}_A = I_A \vec{\alpha} = I_A \frac{d\vec{\omega}}{dt} \Rightarrow \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}_A}{I_A}$$

il momento d'inerzia rispetto al centro di massa di una asta omogenea e'

$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$

ma l'asta sta ruotando <u>rispetto al punto A</u> non rispetto al centro di massa !

per determinare il momento d'inerzia rispetto a questo asse di rotazione

si utilizza il teorema di Huygens Steiner per il teorema di Huygens Steiner il momento d'inerzia di un corpo esteso

di massa totale M calcolato rispetto ad un asse che si trova a distanza a

da un asse passante per il centro di massa e' dato da

$$I = I_C + Ma^2 \quad \text{con} \quad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

percio'se $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4}$

$$\Rightarrow I_A = \frac{1}{3}ML^2$$

nell'istante immediatamente susseguente alla recisione della fune

le uniche forze a momento non nullo agenti sull'asta

saranno la forza peso $\vec{P}$ e la forza $\vec{F}$

il modulo del momento di queste forze rispetto al polo A e'

$$|\vec{\alpha}| = \frac{\left|\vec{M}_A\right|}{I_A} = \frac{\frac{1}{3}LF + \frac{1}{2}LMg}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{\frac{1}{3}F + \frac{1}{2}Mg}{\frac{1}{3}ML} = \frac{F + \frac{3}{2}Mg}{ML}$$

$$|\vec{\alpha}| = \frac{F}{ML} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

Backup slides