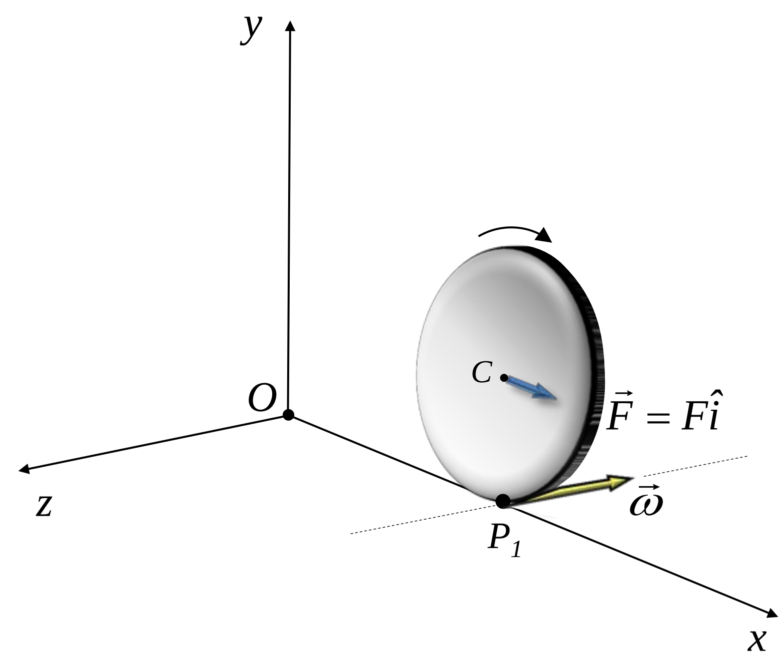
Un disco rigido e omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare

su una rotaia orizzontale dotata d'attrito, disposta lungo l'asse delle ascisse

di un riferimento cartesiano, sotto l'azione d'una forza costante

$\vec{F} = F\hat{\imath}$ ortogonale all'asse di rotazione.

e applicata nel centro C del disco.



Nel sistema di riferimento inerziale prescelto

il disco ruota in senso orario nel piano (x,y)

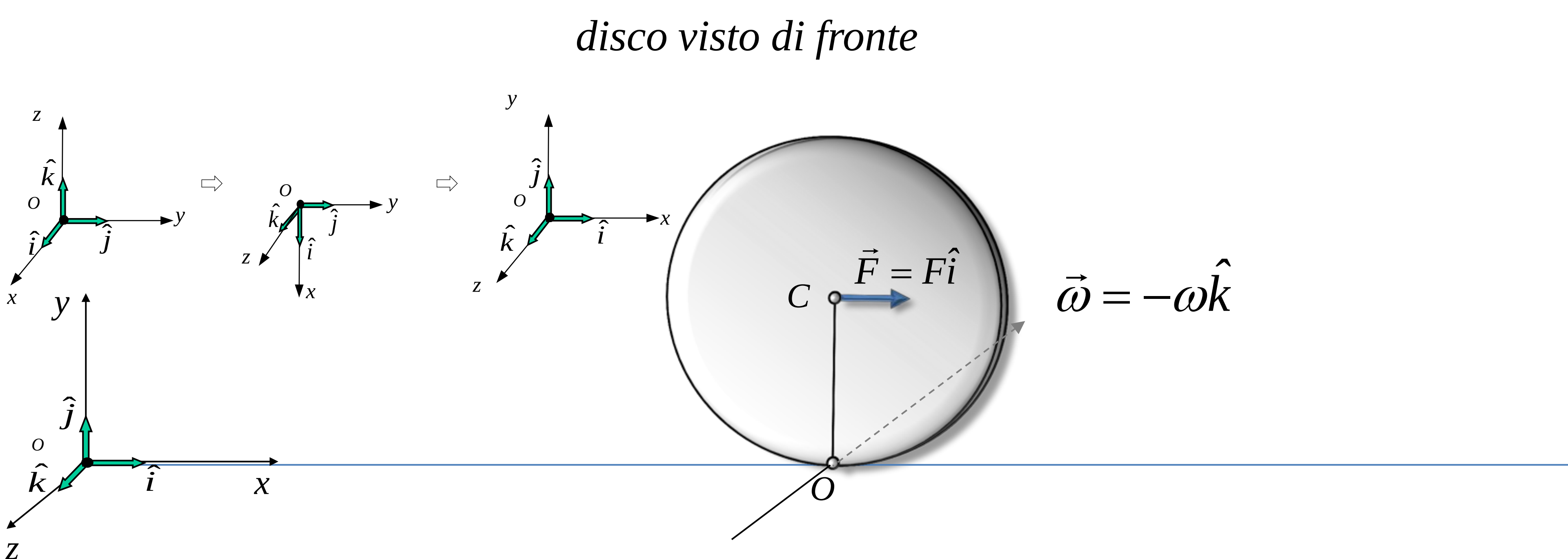
(dove l'asse y è verticale ascendente)

con velocità angolare istantanea $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$

Determinare le espressioni

a) del modulo a_G dell'accelerazione con la quale trasla il centro di massa C del disco

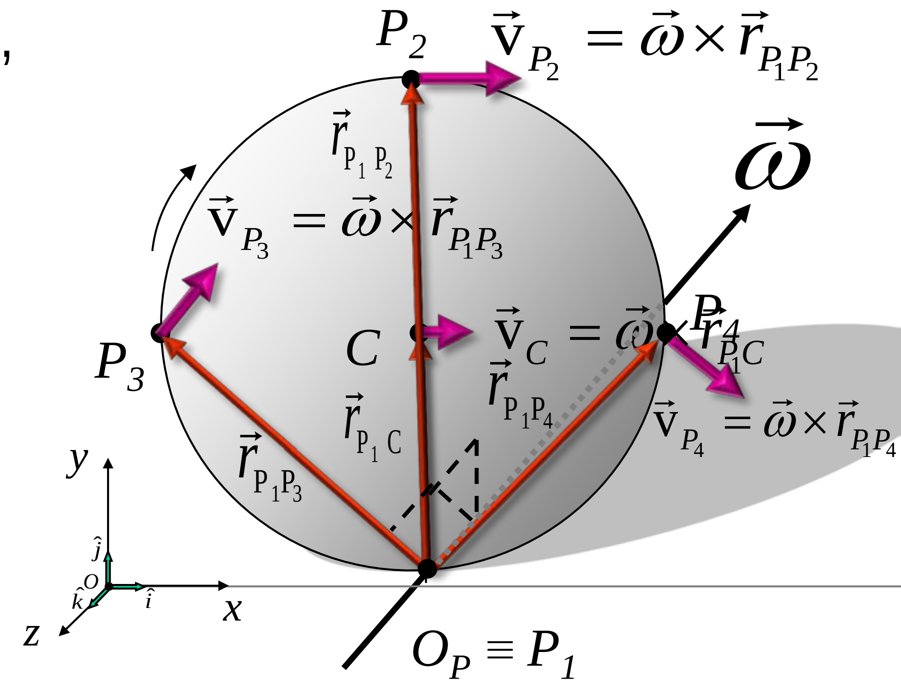
b) della componente tangenziale della forza d'attrito $\vec{R}_t = -R_t \hat{i}$



dalla cinematica del moto dei corpi rigidi sappiamo che la velocita'

di un generico punto P_i del corpo rigido e'

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_{O_P} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$



e se nell'istante in cui P_1 e' fermo

lo assumiamo come polo O_P

chiaramente in quell'istante si avra' $\vec{\mathrm{v}}_{O_P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

in questo caso il polo O_P e' istantaneamente fermo rispetto al sistema inerziale

perciò' $\vec{v}_{O_P} = 0$ e la seconda equazione cardinale

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{E} - \vec{v}_{O_P} \times M\vec{v}_{CM}$$

si riduce a

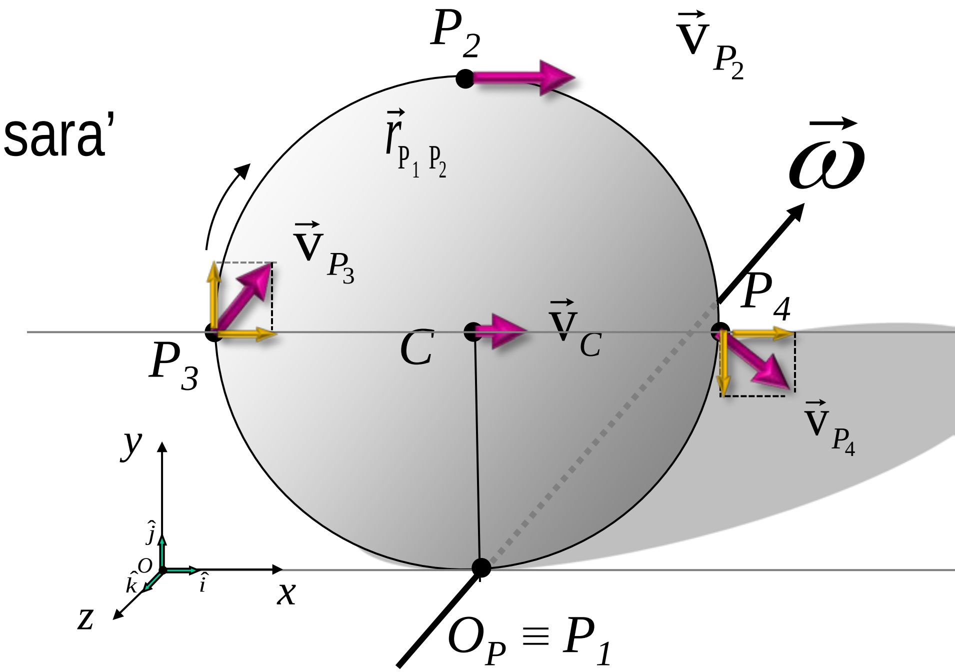
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{E}$$

vista la simmetria e l'omogeneita' della distribuzione delle masse nel corpo

la posizione del centro di massa coincidera' con il centro C del disco

e la velocita' $\vec{\mathrm{v}}_{CM}$ del centro di massa sara'

parallela all'asse x



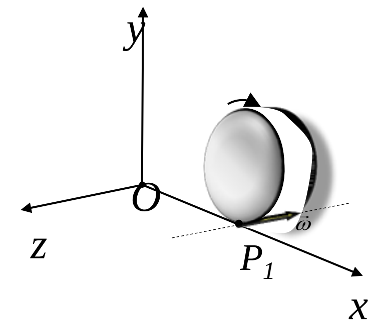
la dinamica del corpo rigido dipende

- dal fatto che il momento angolare totale $\vec{L}$ sia o non sia parallelo alla velocita' angolare $\vec{\omega}$

- dal valore del suo momento d'inerzia I_O rispetto all'asse di rotazione

- dal fatto che il momento d'inerzia I_O sia o meno costante nel tempo in questo caso il momento angolare totale del disco rispetto ad O_P

sara' parallelo alla velocita' angolare infatti

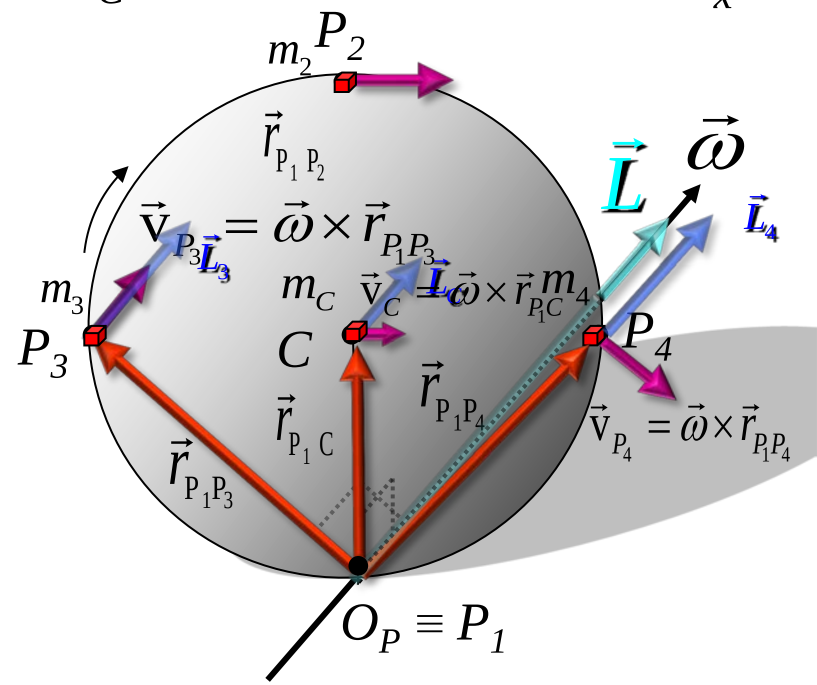


$$\vec{L}_C = \vec{r}_{P_1C} \times m_C \vec{\mathrm{v}}_{P_C} = m_C \; \vec{r}_{P_1C} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{P_1C} \right) \Rightarrow \; \vec{L}_C \; // \; \vec{\omega}$$

e ovviamente anche $\vec{L}_2 \; // \; \vec{\omega}$ etc.

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_{P_1P_3} \times m_3 \vec{\mathrm{v}}_{P_3} \Rightarrow \; \vec{L}_3 \; // \; \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_4 = \vec{r}_{P_1P_4} \times m_4 \vec{\mathrm{v}}_{P_4} \Rightarrow \; \vec{L}_4 \; // \; \vec{\omega}$$



quindi $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$ sara' parallelo a $\vec{\omega}$

e si avra' $\vec{L} = I_O \vec{\omega}$ dove I_O e' il momento d'inerzia rispetto ad O_P

dunque $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{E}$ e $\vec{L} = I_O \vec{\omega}$

e poiche' il momento d'inerzia e' costante $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = I_O \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

quanto alle forze esterne il peso del corpo puo' essere pensato come applicato

al centro di massa del corpo e il momento risultante

della forza peso rispetto al polo O_P sara' nullo ricordando che il disco ha massa M e raggio R

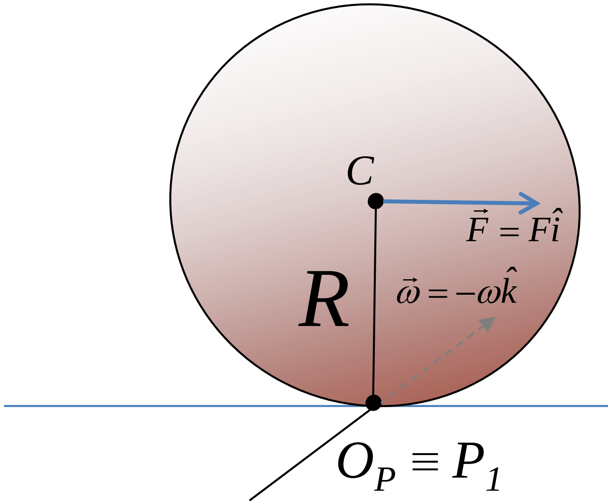
$$\vec{M}^{E} = \vec{R} \times \vec{F} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\Rightarrow \; R\hat{j} \times F\hat{i} = -(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2)\frac{d\omega}{dt}\hat{k}$$

dove si e' usato il teorema di Huygens Steiner per determinare il momento d'inerzia del disco

rispetto ad O_P infatti il momento d'inerzia del disco rispetto al centro di massa C e'

$\frac{1}{2}MR^2$ e la distanza tra C ed O e' R quindi



$$I_O = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2) \quad \text{ossia} \quad I_O = \frac{3}{2}MR^2$$

rispetto al polo il centro di massa e' istantaneamente in rotazione

lungo una traiettoria circolare con velocita' angolare di modulo ω

quindi da $v = \omega r \rightarrow v_G = \omega r_G$

da cui $$\omega = \frac{v_G}{r_G} = \frac{v_G}{R}$$

$$-RF\hat{k} = -\frac{3}{2} MR^2 \frac{d\frac{v_G}{R}}{dt} \hat{k}$$

$$-RF\hat{k} = -\frac{3}{2} MR^2 \frac{a_G}{R} \hat{k} \quad \Rightarrow \quad a_G = \frac{2F}{3M}$$

b) seconda domanda

per determinare la componente tangenziale della forza d'attrito

si utilizza il teorema del moto del centro di massa $\vec{a}_{CM} = \dfrac{\vec{R}^E}{M}$

dove M e' la massa totale del corpo e $\vec{R}^E$ e' la risultante delle forze esterne

da cui $\vec{R}_t + \vec{F} + M\vec{g} = M\vec{a}_G$

$(-R_t + F)\hat{i} = Ma_G\hat{i}$ da cui $-R_t + F = M\dfrac{2F}{3M} = Ma_G$

$R_t = F - Ma_G = F - \dfrac{2F}{3} = \dfrac{F}{3}$ $\Rightarrow$ $\vec{R}_t = -\dfrac{F}{3}\hat{i}$

Backup Slides