Assi principali d’inerzia di un corpo rigido

fino ad ora, oltre ad assumere che $z \equiv z'$, abbiamo sempre supposto che l’asse di rotazione

fosse l’asse z ma piu’ in generale se il corpo sta ruotando attorno ad un qualsiasi asse di rotazione

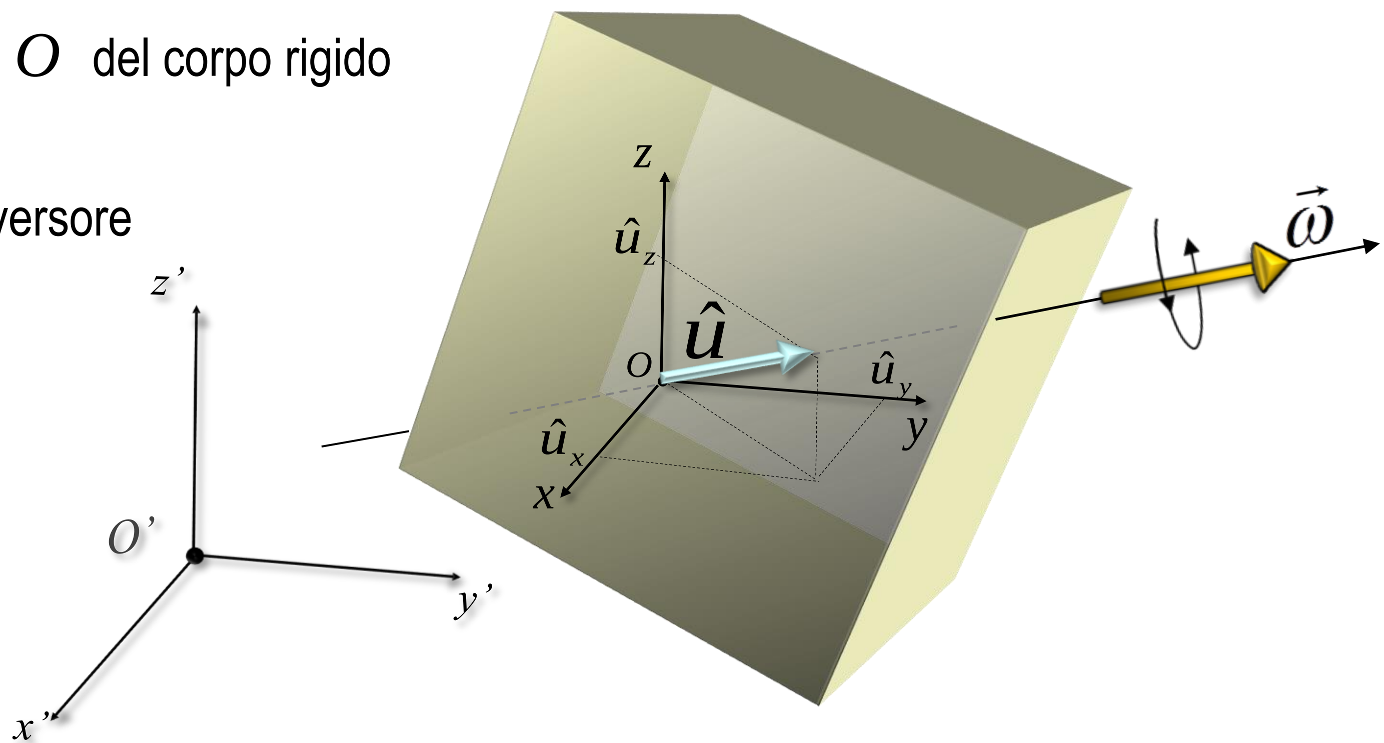
passante per un punto O qualunque del corpo rigido la direzione nello spazio di $\vec{\omega}$

rispetto ai tre assi x, y, z di un sistema di riferimento solidale al corpo rigido

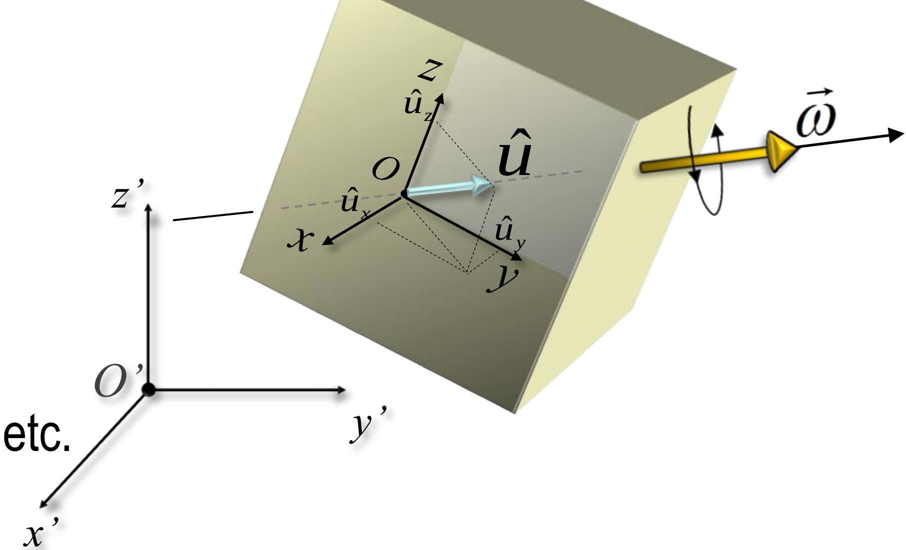
e con origine nel punto O del corpo rigido

sara’ determinata dal versore

$$\hat{u} \Rightarrow \vec{\omega} = \omega \hat{u}$$



proiettando $\hat{u}$ lungo gli assi cartesiani x, y, z



$$\hat{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$$ dove

$$u_x = \hat{u} \cdot \hat{i} = 1 \cdot 1 \cdot cos\alpha = cos\alpha$$ etc.

quindi $$\hat{u} = cos\alpha \hat{i} + cos\beta \hat{j} + cos\gamma \hat{k}$$ e

$$\vec{\omega} = \omega cos\alpha \ \hat{i} + \omega cos\beta \ \hat{j} + \omega cos\gamma \ \hat{k} = \omega_x \ \hat{i} + \omega_y \ \hat{j} + \omega_z \ \hat{k}$$

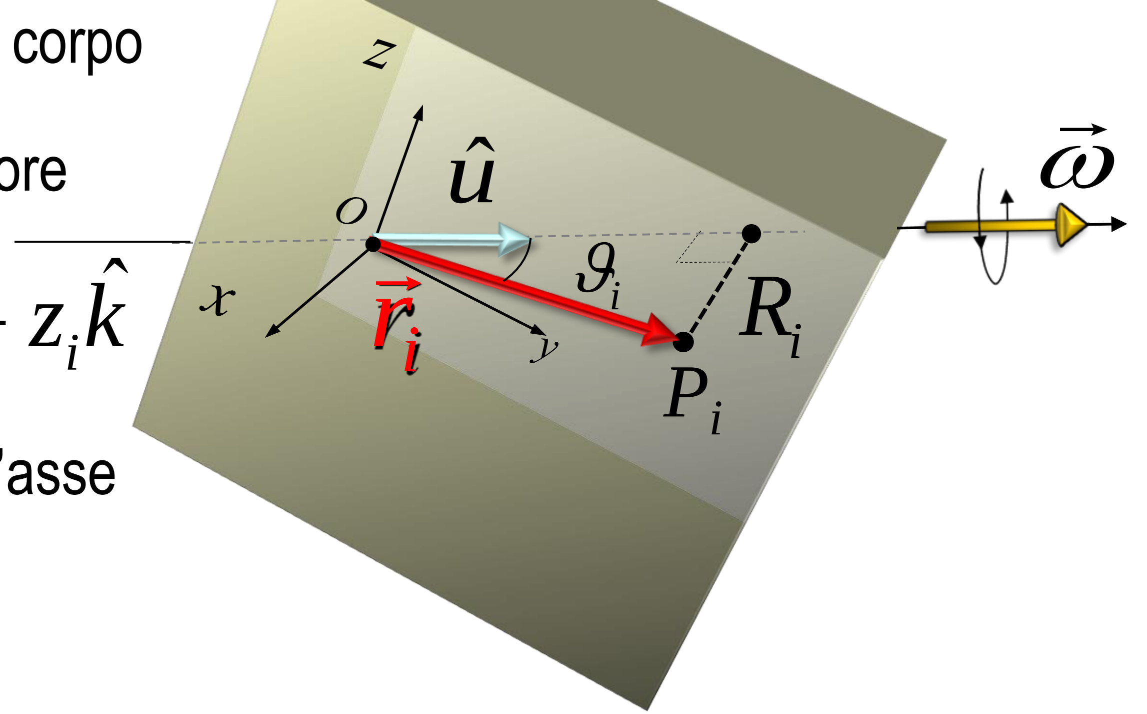
la posizione di ogni punto P_i del corpo

rispetto ad O e' definita dal vettore

posizione $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

la distanza R_i del punto P_i dall'asse

di rotazione e'



$$R_i = r_i sen\vartheta_i = |\hat{u} \times \vec{r}_i|$$

moltiplicando R_i per la massa m_i dell'i-esimo punto si otterra' il momento di inerzia del punto materiale P_i rispetto all'asse di rotazione $\hat{u}$

$$m_i R_i^2 = m_i(\ |\hat{u} \times \vec{r}_i|\ )^2$$

posto $\alpha = cos\alpha$ $\beta = cos\beta$ e $\gamma = cos\gamma$

$\rightarrow$ $\hat{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$

$$\hat{u} \times \vec{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i)\hat{i} + (\gamma x_i - \alpha z_i)\hat{j} + (\beta x_i - \alpha y_i)\hat{k}$$

$$\hat{u} \times \vec{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i)\hat{i} + (\gamma x_i - \alpha z_i)\hat{j} + (\beta x_i - \alpha y_i)\hat{k}$$

quadrando $\hat{u} \times \vec{r}_i$ e sommando su tutti i punti del corpo rigido

$$I_u = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) \quad \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

$$I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i \rightarrow$$

momento d'inerzia <u>rispetto all'asse x</u>

momento d'inerzia <u>rispetto all'asse y</u>

momento d'inerzia <u>rispetto all'asse z</u>

prodotti d'inerzia

$$I_u = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$$

$\downarrow$ dividendo per I_u

$$1 = I_{xx}\frac{\alpha^2}{I_u} + I_{yy}\frac{\beta^2}{I_u} + I_{zz}\frac{\gamma^2}{I_u} - 2I_{xy}\frac{\alpha\beta}{I_u} - 2I_{yz}\frac{\beta\gamma}{I_u} - 2I_{zx}\frac{\gamma\alpha}{I_u}$$

$\downarrow$ posto $X = \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_u}}$ $Y = \dfrac{\beta}{\sqrt{I_u}}$ e $Z = \dfrac{\gamma}{\sqrt{I_u}}$

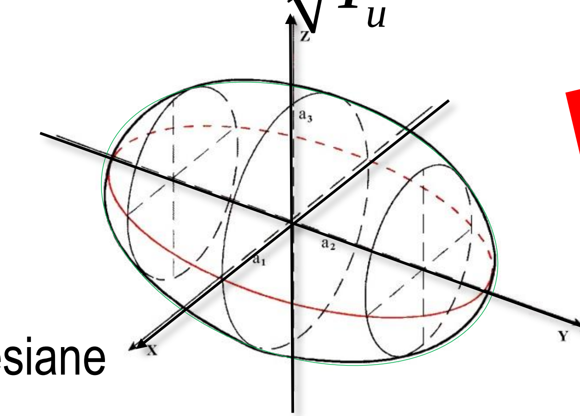
$$I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$$

$\downarrow$

cosa rappresentano le grandezze $X = \dfrac{\alpha}{\sqrt{I_u}}$ $Y = \dfrac{\beta}{\sqrt{I_u}}$ e $Z = \dfrac{\gamma}{\sqrt{I_u}}$?

Nota Bene: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

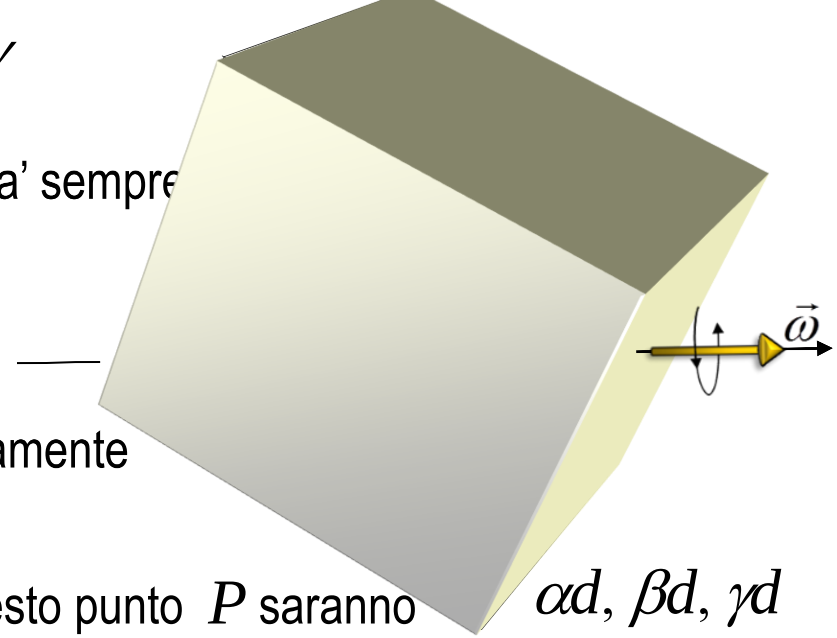
e' l'equazione cartesiana di un elissoide standard in coordinate cartesiane



l'estremo del versore $\hat{u}$ che ha coordinate α, β, γ

dista uno da O $I_u = \sum_{i=1}^{n} m_i R_{u_i}^2 > 0$ percio' sara' sempre

possibile trovare sull'asse di rotazione



un punto P di coordinate X, Y, Z che disti esattamente

$d = \frac{1}{\sqrt{I_u}}$ da O le coordinate X, Y, Z di questo punto P saranno $\alpha d, \beta d, \gamma d$

ossia $X = \frac{\alpha}{\sqrt{I_u}}$ $\quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I_u}}$ $\quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_u}}$

quindi $I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$

e' l'equazione a cui devono soddisfare le coordinate di un qualsiasi punto

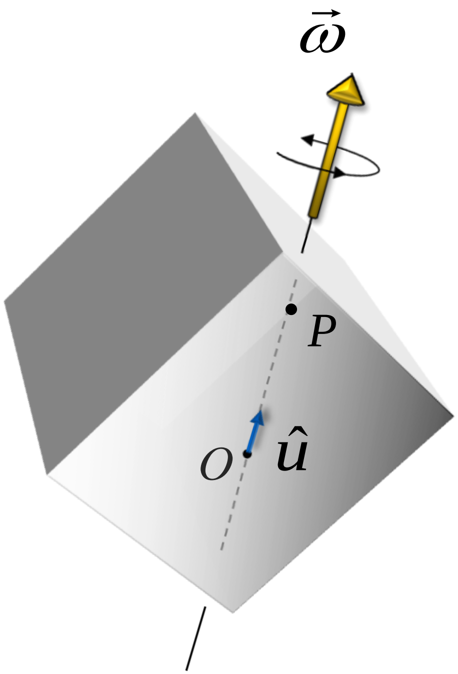
che disti $\frac{1}{\sqrt{I_u}}$ dall'origine O dove I_u e' il momento d'inerzia del corpo

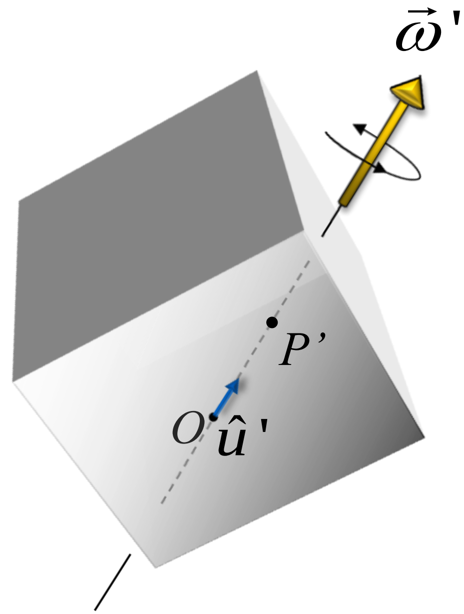
rispetto all'asse di rotazione definito dai punti O e P

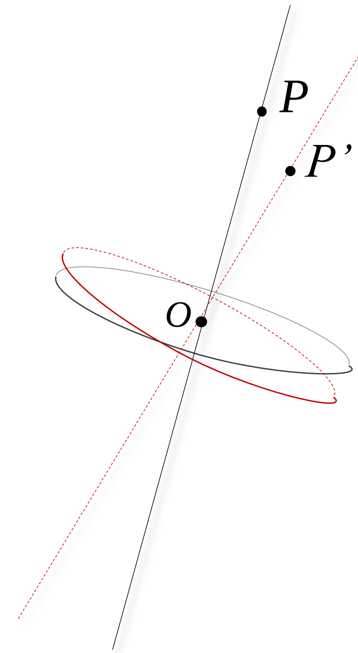
se si facesse ruotare il corpo attorno ad un altro asse, <u>sempre passante per O</u>

rispetto a prima il corpo avrebbe un nuovo momento d'inerzia I', ma si potrebbe

comunque trovare sul nuovo asse un punto P' che disti $d = \dfrac{1}{\sqrt{I'}}$ da O





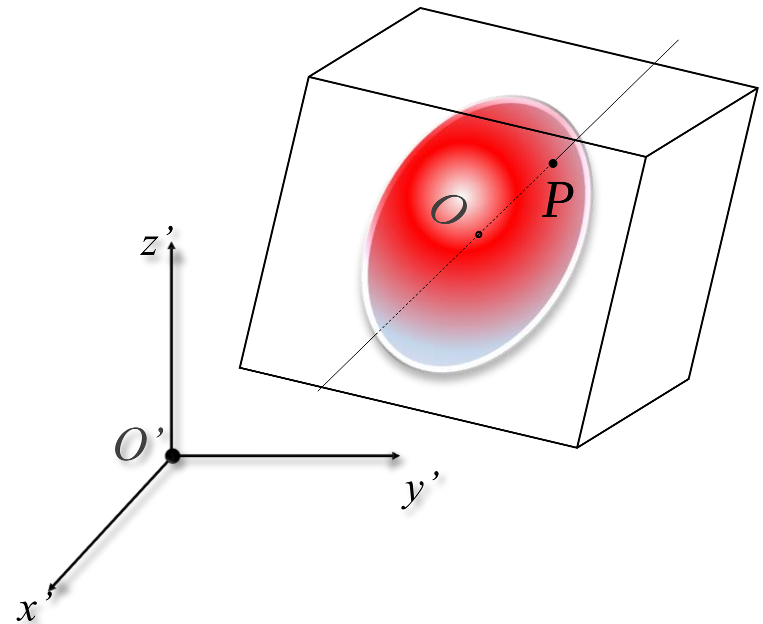


qual'e' il "*luogo*" di questi punti ?

qualunque sia la distribuzione di massa del corpo il "luogo dei punti" che soddisfano la relazione

e' una superficie elissoidale con centro in O detta **" *elissoide di inerzia* "**

del corpo rigido rispetto al punto O



"*Teorema di Poinsot*"

l'elissoide d'inerzia e' fisso rispetto al corpo

e non dipende dal sistema di riferimento

x, y, z prescelto ma solo da O

$\downarrow$

il momento d' inerzia del corpo rigido rispetto a qualsiasi asse di rotazione $\hat{u}$

passante per il centro dell'elissoide si otterra' calcolando la distanza tra O

e il punto geometrico P di intersezione dell'asse con l'elissoide,

infatti la distanza OP vale $\dfrac{1}{\sqrt{I_u}}$

Assi principali d'inerzia, momenti principali d'inerzia e **assi centrali d'inerzia**

gli assi di un elissoide
si determinano in base
al diametro <u>minimo</u>
al diametro <u>massimo</u>
e ad un terzo asse
perpendicolare
ai due diametri

↓

gli assi dell'elissoide
d'inerzia di un corpo
rigido sono gli
<u>assi principali d'inerzia</u>

→ se come assi $x, y, z,$
solidali al corpo rigido
si scegliessero proprio
gli assi principali d'inerzia
l'equazione dell'elissoide
assumerebbe la forma standard

$$I_{Px}X^2 + I_{Py}Y^2 + I_{Pz}Z^2 = 1$$

dove I_{Px} I_{Py} e I_{Pz} sono i
momenti d'inerzia rispetto
agli assi principali d'inerzia

↓

I_{Px}, I_{Py} e I_{Pz} sono i
<u>momenti principali d'inerzia</u>

→ se il punto O coincidesse con
il centro di massa si avrebbe
l' "*<u>elissoide centrale d'inerzia</u>*"
e gli "*<u>assi centrali d'inerzia</u>*"

↓

gli assi centrali di inerzia
sono sempre **<u>almeno</u>** tre
ma potrebbero essere anche piu'
se il corpo possedesse particolari
proprieta' di simmetria

per es. se l'elissoide divenisse
una superficie sferica
qualsiasi asse passante per O
sarebbe asse centrale d'inerzia

Nota bene :

- **l'elissoide d'inerzia**

non **e' una porzione**

di corpo rigido

di forma elissoidale

e' una superficie ''fittizia''

definita da una equazione

matematica

(n.d.r. un po' come per la superficie ''gaussiana''

con la differenza che nel teorema di Gauss

la superficie puo' essere di forma qualsiasi)

e' una forma geometrica

che specifica le caratteristiche

di un corpo rigido

dal punto di vista delle

rotazioni intorno ad un asse

e dipende sia dalla forma

del corpo rigido,

che dalla distribuzione

delle masse all' interno del corpo

per definizione $$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

ma $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

in generale $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}$
$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$

$$L_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Nota Bene :

$$\vec{L} = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\,\hat{i} + (-I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\,\hat{j} + (-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\,\hat{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$$

e' evidente che in generale $\vec{L}$ <u>non</u> e' proporzionale ad $\vec{\omega}$

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

e' la "*matrice d'inerzia*"

- se scegliessimo come assi di riferimento x, y, z gli assi principali d'inerzia

la matrice d'inerzia <u>diagonalizzerebbe</u> $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} I_{Px} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Py} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Pz} \end{vmatrix}$$

e la relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ diverrebbe semplicemente

$$\vec{L} = I_{Px}\omega_x\hat{i} + I_{Py}\omega_y\hat{j} + I_{Pz}\omega_z\hat{k}$$

vale a dire che il momento angolare totale diverrebbe direttamente proporzionale alla velocita' angolare in conclusione:

per ogni corpo rigido qualunque sia la sua forma geometrica e qualunque sia la sua distribuzione di massa esisteranno sempre tre (o piu') assi passanti per un qualsiasi punto fisso O del corpo che possiedono la proprieta' che quando il corpo ruota attorno ad uno di essi $\vec{L}$ e' parallelo ad $\vec{\omega}$

significato fisico → in teoria e' sempre possibile realizzare una configurazione che annulli , o quanto meno minimizzi le sollecitazioni dinamiche sui supporti che sorreggono il corpo rigido in rotazione

implicazioni pratiche → sara' necessario curare molto attentamente la progettazione dei corpi rotanti

Backup Slides