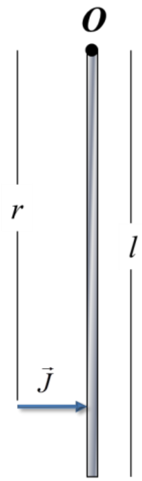
Un pendolo composto e' costituito da un asticella omogenea rigida di lunghezza l e massa m libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo O. All'inizio l'asta e' ferma in posizione verticale.

Determinare il modulo della velocita' angolare acquisita dall'asta nell'istante immediatamente successivo all'applicazione di un impulso $\vec{J}$ applicato perpendicolarmente all'asta ad una generica distanza r da O con $r \leq l$

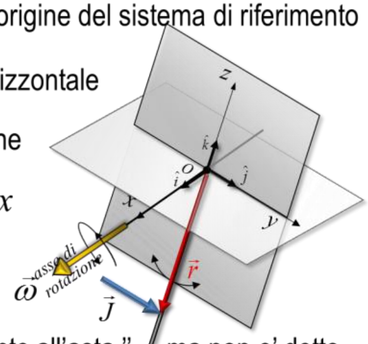
Determinare il modulo dell' impulso che occorrera' applicare alla generica distanza r da O per far compiere all'asta una rotazione di 90°.



dato che il punto O e' fisso sceglieremo questo punto come polo e in questo caso sara' conveniente far coincidere il polo O con l'origine del sistema di riferimento

" l'asta e' libera di ruotare attorno ad un asse orizzontale passante per un suo estremo O " significa che

- l'asse di rotazione e' nella direzione dell'asse x quindi l'asta e' libera di ruotare nel piano yz



l'impulso $\vec{J}$ viene applicato " perpendicolarmente all'asta " ma non e' detto in quale direzione sia diretto → assumeremo che sia orientato nella direzione e verso positivo dell'asse y dunque $\vec{J} = J\hat{j}$ percio' $\vec{\omega} = \omega\hat{i}$

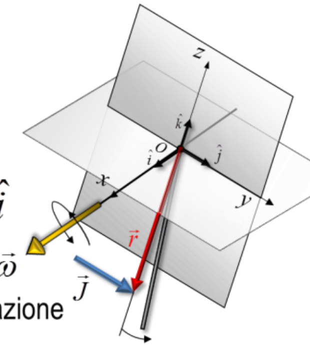
il momento dell'impulso rispetto ad O e' $\vec{r} = -r\hat{k}$

per cui $\vec{r} \times \vec{J} = -rJ(\hat{k} \times \hat{j}) = rJ\,\hat{i}$

nell'istante immediatamente successivo all'applicazione dell' impulso $\vec{J}$ l'asticella iniziera' a ruotare nel piano yz

il momento dell'impulso rispetto ad O e' $rJ\,\hat{i}$

e in questo caso e' chiaro che $\vec{L} = I_O\vec{\omega} = I_O\omega\hat{i}$



indicheremo con un apice le grandezze dopo l'applicazione dell'impulso quindi $\vec{L}_{in}^{\,'}$ e' il momento angolare rispetto al polo O immediatamente **dopo** l' applicazione dell'impulso all' asta e $\vec{L}_{in}$ e' il momento angolare rispetto ad O immediatamente **prima** dell' applicazione dell'impulso all' asta

applicando il teorema del momento dell'impulso si ha

$$rJ\,\hat{i} = \vec{L}_{in}^{\,'} - \vec{L}_{in}$$

tenendo conto che il momento angolare iniziale O e' nullo ossia che $\vec{L}_{in} = 0$

si ottiene $rJ\,\hat{i} = \vec{L}_{in}^{\,'}$ ovvero $rJ\,\hat{i} = I_O\omega_{in}^{'}\hat{i}$

considerando i moduli $rJ = I_O\omega_{in}^{'}$ quindi $\omega_{in}^{'} = \dfrac{rJ}{I_O}$

attenzione: I_O e' il momento d'inerzia dell'asta rispetto al punto O

utilizzando il teorema di Huygens Steiner risulta $I_O = \dfrac{1}{3}ml^2$

quindi la velocita' angolare acquisita dall'asta a seguito dell'applicazione dell'impulso, immediatamente dopo la sua applicazione sara'

$$\omega_{in}^{'} = \frac{3rJ}{ml^2}$$

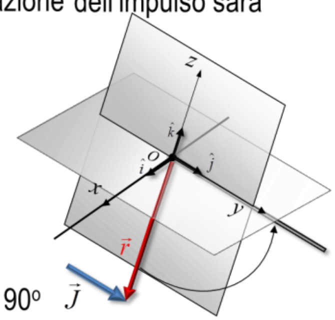
l'applicazione dell'impulso e' molto rapida quindi si puo' pensare che l'asta rimanga praticamente ferma durante il brevissimo intervallo in cui agisce la forza

quindi il centro di massa dell'asta, che coincide con il punto di mezzo dell'asta, e' collocato nella posizione $z_{cm_{in}}^{'} = -\frac{l}{2}\hat{k}$

e l'energia potenziale dell'asta sara' $E_{p_{in}}^{'} = -mg\frac{l}{2}$

l'energia meccanica immediatamente dopo l'applicazione dell'impulso sara'

$$E_{m_{in}}^{'} = \frac{1}{2}I(\omega_{in}^{'})^2 - mg\frac{l}{2}$$



immediatamente dopo l'applicazione dell'impulso

l'asticella inizierà a ruotare e dopo una rotazione di 90° $\vec{J}$

il centro di massa dell'asta, si sara' sollevato di $l/2$

e per un breve istante l' asta cessera' di ruotare

in quel preciso momento l'energia potenziale dell'asticella sara' $E_{p_{fin}}^{'} = 0$

quando l'asticella arriva a 90° si ferma per un attimo nella posizione orizzontale

per cui $\omega_{fin}^{'} = 0$ ⇨ $E_{c_{fin}}^{'} = 0$ inoltre $E_{p_{fin}}^{'} = 0$

dunque $E_{m_{fin}}^{'} = 0$

visto che siamo in assenza di attriti possiamo imporre

la conservazione dell'energia meccanica ⇨ $E_{m_{in}}^{'} = E_{m_{fin}}^{'}$

da cui si ottiene $\frac{1}{2}I(\omega_{in}^{'})^2 = mg\frac{l}{2}$ ossia $I(\omega_{in}^{'})^2 = mgl$

e dato che $\omega_{in}^{'} = \frac{3rJ}{ml^2}$ ⇨ $I_O(\frac{3rJ}{ml^2})^2 = mgl$

ma $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ ⇨ $J = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{gl^3}{3}}$

nel caso di moto rototraslatorio di un corpo rigido la formula che fornisce la velocita' di un generico punto P_i del corpo rigido e'

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

che in questo caso si riduce a $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

poiche' $\vec{v}_O = 0$ visto che la velocita' del polo e' nulla

data la velocita' angolare e' possibile calcolare la velocita' del centro di massa

immediatamente dopo l'applicazione dell'impulso in modulo $v_{CM} = \omega\frac{l}{2}$

Attenzione: l'asticella e' vincolata in O e durante l'applicazione del

momento della forza si sviluppa nel punto O una reazione vincolare **impulsiva**

da notare che l'impulso di reazione non e' stato conteggiato nel calcolo

del momento dell'impulso perche' rispetto al punto O ha momento nullo

ma esiste e bisognera' tenerlo a mente perche' manifesta la sua presenza

ad esempio applicando il teorema dell'impulso $\vec{J} = \Delta\vec{q}$

e sfruttando le proprieta' del centro di massa $\vec{\mathrm{v}}_{CM} = \dfrac{\vec{Q}}{M}$

si sarebbe ottenuto $\mathrm{v}_{CM} = \dfrac{J}{m}$ come modulo della velocita' del

centro di massa invece di $\mathrm{v}_{CM} = \omega\dfrac{l}{2}$

la causa della differenza la presenza del vincolo

e dal confronto tra il valore della variazione della quantita' di moto

del centro di massa in modulo pari a $m\omega\dfrac{l}{2}$ e J/m

si puo' determinare l'impulso della reazione vincolare

la variazione della quantita' di moto del centro di massa risulta in modulo

uguale a $m\mathrm{v}_{CM} = m\omega\dfrac{l}{2}$ visto che il centro di massa

era inizialmente fermo,

Backup slides