

Un asticella omogenea di massa m_1 e lunghezza l e' ferma sopra un piano orizzontale liscio. Un corpo materiale puntiforme di massa m_2

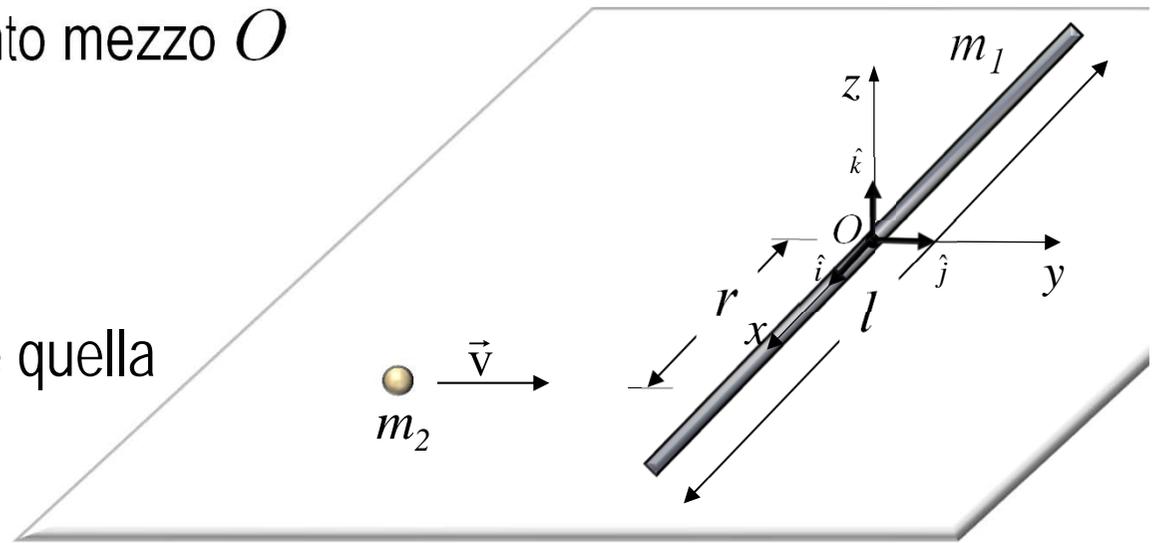
in moto con velocita' $\vec{v} = v\hat{j}$ perpendicolare alla sbarretta,

la urta a distanza r dal suo punto mezzo O

e vi rimane appiccicato.

Determinare la velocita' lineare e quella

angolare del sistema dopo l'urto



assumeremo come sistema di riferimento fisso un sistema di coordinate

cartesiane ortogonali con centro in O e asse x parallelo all'asse dell'asticella

➤ il sistema è costituito dall'asta piu' il punto materiale

durante l'urto agiscono soltanto forze interne quindi il sistema è isolato

e sarà possibile imporre la conservazione della quantità di moto totale e

la conservazione del momento angolare totale del sistema

ma dato che l'urto è perfettamente anelastico, non si potrà imporre

la conservazione dell'energia cinetica

dopo l'urto la velocità del centro di massa coinciderà con quella del sistema

costituito dall'asta piu' una massa m_2 posta a distanza r dal centro dell'asta

la quantità di moto totale è $\vec{Q} = m_2 \vec{V}$ prima dell'urto

e dopo l'urto diviene $\vec{Q}' = (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM}$ imponendo la conservazione

della quantità di moto totale ossia imponendo che $\vec{Q}' = \vec{Q}$ si ha

$$m_2 \vec{V} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM} \text{ da cui } \vec{V}_{CM} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{V} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} v \hat{j}$$

dato che non vi sono forze esterne agenti sul sistema il centro di massa

si muoverà di moto rettilineo uniforme quindi la velocità del centro di massa

del sistema asta più punto materiale dovrà essere stata la stessa anche

prima dell'urto e tale resterà dopo l'urto

per quanto riguarda il moto traslatorio del sistema la massa dell'asta si puo' trattare come se fosse concentrata nel centro di massa dell' asta

vista dall'alto

che, prima dell'urto, coincide con l'origine O

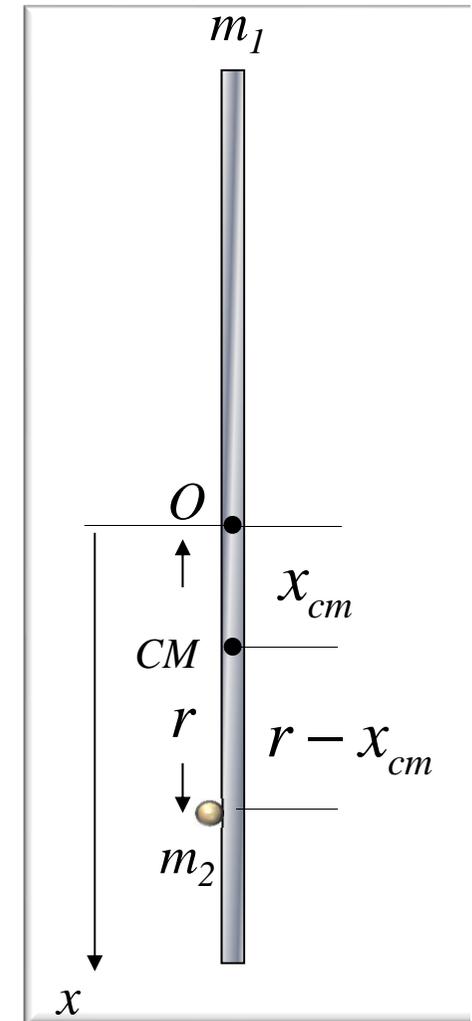
- nell'istante in cui avviene l'urto $y_{cm} = z_{cm} = 0$

e la distanza del centro di massa del sistema

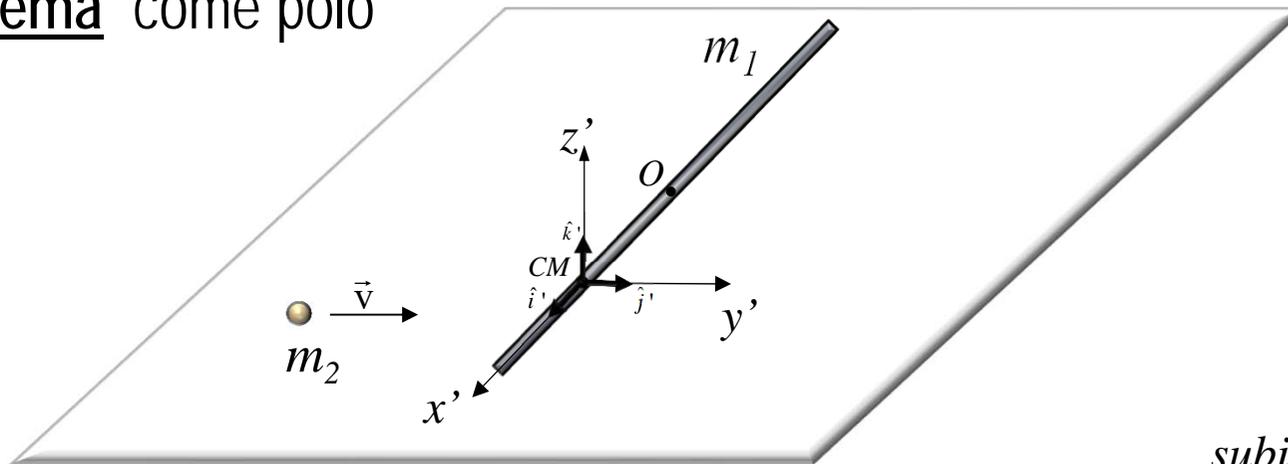
rispetto all'origine O lungo l'asse x sara'

$$x_{cm} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 r}{(m_1 + m_2)} \quad \text{ossia} \quad x_{cm} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r$$

e la distanza tra il centro di massa del sistema CM ed m_2 sara' $r - x_{cm}$



per analizzare il moto rotatorio del sistema conviene assumere il centro di massa del sistema come polo

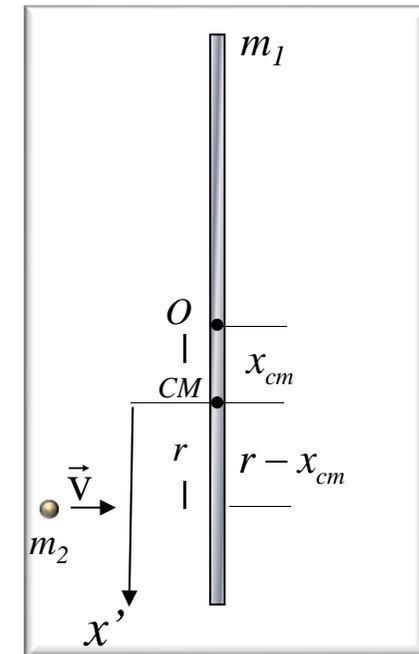


subito prima prima dell'urto l'asticella e' ferma percio'

$$\vec{L} = 0 + (r - x_{CM}) \hat{i}' \times m_2 v \hat{j}'$$

ossia
$$\vec{L} = (r - x_{CM}) m_2 v \hat{k}'$$

subito prima dell'urto



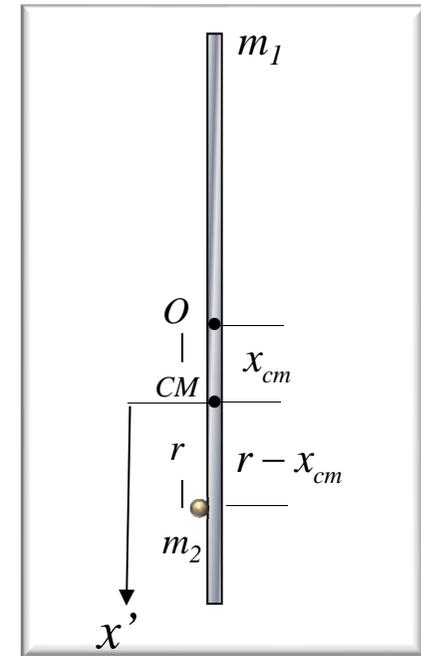
subito dopo l'urto $\vec{L}' = I_{CM} \omega \hat{k}'$

imponendo la conservazione del momento angolare totale

$$(r - x_{CM}) m_2 v = I_{CM} \omega$$

da cui
$$\omega = \frac{(r - x_{CM}) m_2 v}{I_{CM}}$$

subito dopo l'urto



il momento d'inerzia rispetto al centro di massa sarà

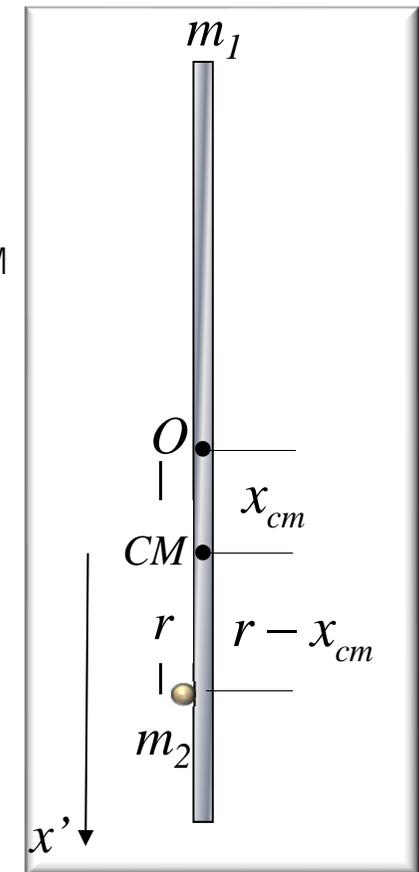
$$I_{CM} = \underbrace{I_{O_{m_1}} + m_1 (O - CM)^2}_{\text{teorema di Huygens Steiner}} + \underbrace{I_{CM_{m_2}}}_{\text{momento d'inerzia di } m_2 \text{ rispetto a CM}}$$

$$\Rightarrow I_{CM} = m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (r - x_{CM})^2$$

quindi la velocità angolare sarà

$$\omega = \frac{(r - x_{CM}) m_2 v}{m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (r - x_{CM})^2} = \frac{r m_2 v}{(m_1 + m_2) \frac{l^2}{12} + m_2 r^2}$$

vista dall'alto



in questo caso la rotazione avverrà in senso antiorario se invece l'urto fosse avvenuto con r al di sopra del centro di massa la rotazione sarebbe stata oraria



prima dell'urto

dopo l'urto

dopo l'urto il centro di massa continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme mentre gli altri punti dell'asta avranno un moto composto da una traslazione con velocità pari a quella del centro di massa e da una rotazione con velocità angolare ω rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per il centro di massa

casi particolari :

➤ se $m_1 = m_2 = m$ si avrebbe

$$x_{CM} = \frac{1}{2} r \quad v_{CM} = \frac{1}{2} v \quad \omega = \frac{rv}{\frac{l^2}{6} + r^2}$$

➤ se la pallina urtasse l'asticella esattamente all'altezza del centro di

massa dell'asta ossia se $r = 0$ si avrebbe $\omega = 0$

e il moto sarebbe di pura traslazione

Backup slides