

Una mole di gas perfetto monoatomico compie il ciclo $ABCD$. Nel punto A si ha : $p_A = 1,51 \text{ atm}$, $V_A = 30,8 \text{ dm}^3$. Sapendo che

$$p_B = k_p p_A, \quad V_C = k_V V_B, \quad k_p = 4.15 \quad \text{e che} \quad k_V = 2.87$$

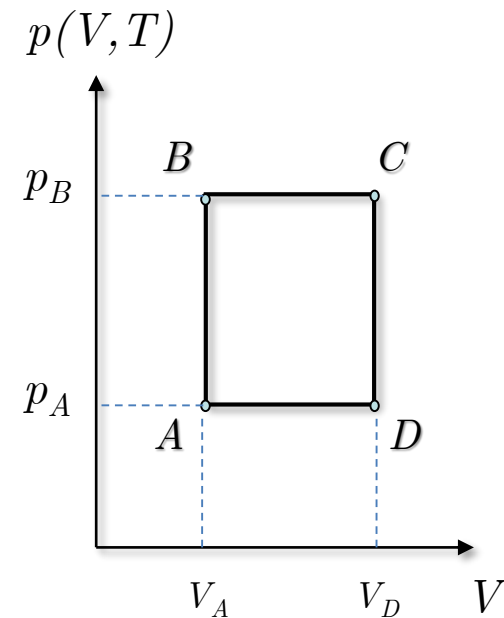
determinare:

(a) il calore totale assorbito dal sistema durante un ciclo,

(b) il calore totale ceduto dal sistema durante ciclo,

(c) il rendimento del ciclo,

(d) il rendimento di una macchina funzionante con un ciclo di Carnot fra le stesse temperature estreme



$$\text{in } A \quad p_A = 1.53 \cdot 10^5 \text{ pa} \quad V_A = 3.08 \cdot 10^2 \text{ m}^3$$

$$\text{da } p_A V_A = nRT_A$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{nR}$$

$$\text{in } C \quad p_C = p_B = k_p p_A$$

$$V_C = k_V V_B = k_V V_A$$

$$p_C V_C = nRT_C \Rightarrow k_p p_A k_V V_A = nRT_C$$

$$\Rightarrow T_C = k_p k_V \frac{p_A V_A}{nR} \Rightarrow T_C = k_p k_V T_A$$

numericamente:

$$p_A = 1.53 \cdot 10^5 \text{ pa}$$

$$V_A = 3.08 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T_A = 5.67 \cdot 10^2 \text{ K}$$

$$p_B = 6.35 \cdot 10^5 \text{ pa}$$

$$V_B = 3.08 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T_B = 2.35 \cdot 10^3 \text{ K}$$

$$p_C = 6.35 \cdot 10^5 \text{ pa}$$

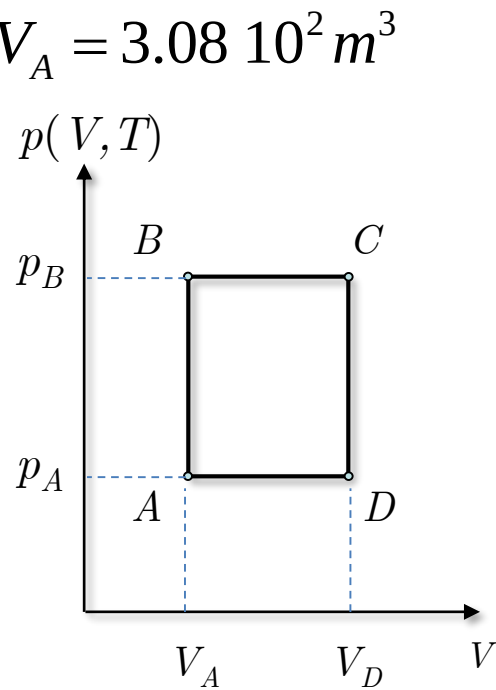
$$V_C = 8.84 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T_C = 5.67 \cdot 10^2 \text{ K}$$

$$p_D = 1.53 \cdot 10^5 \text{ pa}$$

$$V_D = 8.84 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$T_D = 1.63 \cdot 10^3 \text{ K}$$



$$\text{in } B \quad p_B = k_p p_A \quad V_B = V_A$$

$$\text{da } p_B V_B = nRT_B$$

$$\Rightarrow T_B = k_p \frac{p_A V_A}{nR} \Rightarrow T_B = k_p T_A$$

$$\text{in } D \quad p_D = p_A$$

$$V_D = V_C = k_V V_A$$

$$p_D V_D = nRT_D \Rightarrow p_A k_V V_A = nRT_D$$

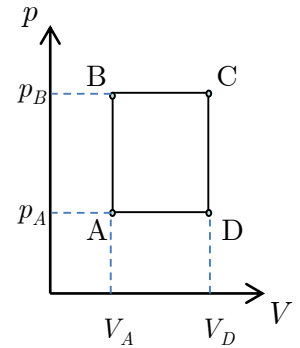
$$\Rightarrow T_D = k_V \frac{p_A V_A}{nR} \Rightarrow T_D = k_V T_A$$

a) **calore totale assorbito dal sistema durante un ciclo :**

1) da A a B la trasformazione e' isocora percio' $Q_{AB} \equiv nc_V \Delta T = n \frac{3}{2} R(T_B - T_A)$

ma $T_B = k_p T_A$ dunque $Q_{AB} = n \frac{3}{2} R(k_p T_A - T_A) \Rightarrow Q_{AB} = n \frac{3}{2} R T_A (k_p - 1)$

$(k_p - 1) > 0 \Rightarrow Q_{AB} > 0 \rightarrow$ da A a B il sistema **assorbe** calore



2) da B a C la trasformazione e' isobara percio' $Q_{BC} = nc_p \Delta T = n \frac{5}{2} R(T_C - T_B)$

ma $T_C = k_p k_V T_A$ dunque $Q_{BC} = n \frac{5}{2} R(k_p k_V T_A - k_p T_A) \Rightarrow Q_{BC} = n \frac{5}{2} R k_p T_A (k_V - 1)$

$(k_V - 1) > 0 \Rightarrow Q_{BC} > 0 \rightarrow$ da B a C il sistema **assorbe** calore

2) da B a C la trasformazione e' isobara ma non e' reversibile

$$dU_{BC} = dQ_{BC} - dL_{BC} \quad Q_{BC} = \Delta U_{BC} + L_{BC}$$

il fatto che la trasformazione sia *irreversibile* potrebbe rendere impossibile calcolare il lavoro

tra B e C dato che in generale durante una trasformazione irreversibile

le coordinate termodinamiche del sistema non sono determinabili

ma, in questo particolare caso, la trasformazione da B a C e' isobara quindi si sta operando

operando a pressione del gas costante e cio' significa che anche la pressione

dell'ambiente rimarra' costante

per determinarne il lavoro notiamo che il punto B è di equilibrio quindi in B

sistema ed ambiente condivideranno le stesse coordinate termodinamiche,

in particolare avranno la stessa pressione p_B e lo stesso si può dire per il punto C

quindi $p_B = p_C = p_{est}$

in sintesi : la trasformazione del sistema da B a C anche se è irreversibile

avviene a pressione esterna costante e in questi particolari casi il lavoro fatto

dal gas si potrà calcolare come $L_{B \rightarrow C} = p_{est} (V_C - V_B)$ e poiché $p_{est} \equiv p_B$

in questo particolare caso di isobara il lavoro da B a C può essere calcolato come

$$L_{B \rightarrow C} = p_B (V_C - V_B) = p_C V_C - p_B V_B \quad L_{BC} = nRT_C - nRT_B$$

$$Q_{BC} = nc_V (T_C - T_B) + nRT_C - nRT_B = nc_V T_C - nc_V T_B + nRT_C - nRT_B$$

$$= nc_V T_C + nRT_C - (nc_V T_B + nRT_B) = nT_C (c_V + R) - nT_B (c_V + R)$$

per la relazione di Mayer $c_p - c_V = R$ $c_p = c_V + R$ $Q_{BC} = nc_p (T_C - T_B)$

$$Q_{BC} = nc_p \Delta T = n \frac{5}{2} R (T_C - T_B)$$

ma $T_C = k_p k_V T_A$ dunque $Q_{BC} = n \frac{5}{2} R (k_p k_V T_A - k_p T_A) \Rightarrow Q_{BC} = n \frac{5}{2} R k_p T_A (k_V - 1)$

$(k_V - 1) > 0 \Rightarrow Q_{BC} > 0 \rightarrow$ da B a C il sistema **assorbe** calore

3) da C a D la trasformazione e' isocora percio' $Q_{CD} = nc_V \Delta T = n \frac{3}{2} R(T_D - T_C)$

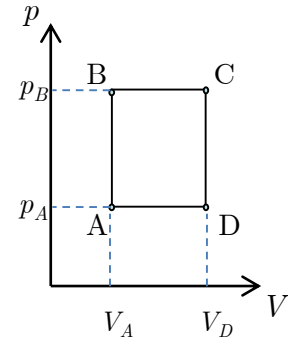
ma $T_D = k_V T_A$ dunque $Q_{CD} = n \frac{3}{2} R(k_V T_A - k_p k_V T_A) \Rightarrow$ $Q_{CD} = n \frac{3}{2} R k_V T_A (1 - k_p)$

$(1 - k_p) < 0 \Rightarrow Q_{CD} < 0 \rightarrow$ da C a D il sistema cede calore

4) da D ad A la trasformazione e' isobara percio' $Q_{DA} = nc_p \Delta T = n \frac{5}{2} R(T_A - T_D)$

ma $T_D = k_V T_A$ dunque $Q_{DA} = n \frac{5}{2} R(T_A - k_V T_A) \Rightarrow$ $Q_{DA} = n \frac{5}{2} R T_A (1 - k_V)$

$(1 - k_V) < 0 \Rightarrow Q_{DA} < 0 \rightarrow$ da D ad A il sistema cede calore

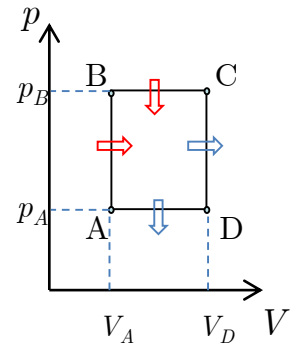


→ calore totale assorbito dal sistema durante il ciclo $Q_{AB} + Q_{BC}$

$$= n \frac{3}{2} RT_A (k_p - 1) + n \frac{5}{2} R k_p T_A (k_V - 1)$$

$$= nRT_A \left[\frac{3}{2} (k_p - 1) + k_p \frac{5}{2} (k_V - 1) \right] \Rightarrow Q_{AB} + Q_{BC} = nRT_A \left(\frac{5}{2} k_p k_V - k_p - \frac{3}{2} \right)$$

$$Q_{AB} + Q_{BC} = 1.14 \cdot 10^5 \text{ J}$$



(b) calore totale ceduto dal sistema durante il ciclo $Q_{CD} + Q_{DA}$

$$= n \frac{3}{2} R k_V T_A (1 - k_p) + n \frac{5}{2} RT_A (1 - k_V) = nRT_A \left[\frac{3}{2} k_V (1 - k_p) + \frac{5}{2} (1 - k_V) \right]$$

$$Q_{CD} + Q_{DA} = nRT_A \left(-k_V - \frac{3}{2} k_p k_V + \frac{5}{2} \right) \Rightarrow Q_{CD} + Q_{DA} = -8.59 \cdot 10^4 \text{ J}$$

c) rendimento del ciclo

$$\eta = \frac{L_f + L_s}{Q_a} = \frac{Q_a + Q_c}{Q_a} = 1 + \frac{Q_c}{Q_a} = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_a} \quad \text{dato che } Q_c < 0 \Rightarrow \eta = 0.244$$

d) rendimento di una macchina funzionante con un ciclo di Carnot fra le stesse temperature estreme

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad \text{con } T_1 < T_2 \Rightarrow \eta_{Carnot} = 0.916$$

Backup Slides