Differenziale esatto di una funzione di due variabili

date due diverse funzioni g ed h dipendenti dalle due sole variabili x e y ,

la forma funzionale lineare $g(x, y)dx + h(x, y)dy$ e' un differenziale esatto

se esiste una funzione $f(x, y)$ di cui la forma funzionale sia il differenziale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{g(x,y)dx + h(x,y)dy}$$

se $g(x,y)dx + h(x,y)dy$
 deve essere il differenziale di $f(x,y)$
 $\rightarrow g(x,y)dx + h(x,y)dy = df$

$$g(x,y)dx + h(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

e

$$h(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

derivando parzialmente la
 funzione $g(x,y)$ rispetto ad y

derivando parzialmente la
 funzione $h(x,y)$ rispetto ad x

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

a patto che il dominio della funzione
 $f(x,y)$ sia semplicemente connesso
 l'ordine di derivazione e' ininfluyente

$$\rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

condizione affinché esista una funzione $f(x,y)$ di cui la forma lineare

$g(x,y)dx + h(x,y)dy$ sia un differenziale esatto

e' che si abbia $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial h(x,y)}{\partial x}$

ossia

$$\left(\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} \right)_x = \left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} \right)_y$$

Backup Slides