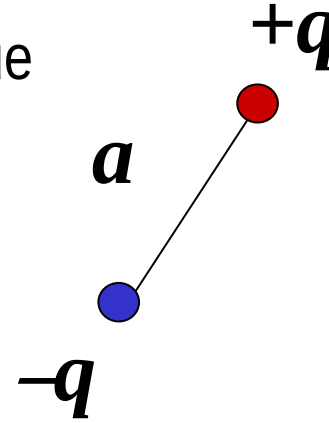


Dipolo elettrico

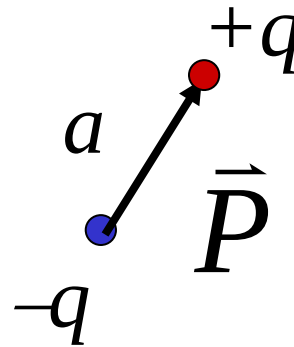
si definisce *dipolo elettrico* l'insieme di due cariche elettriche di uguale valore q ma opposte di segno, mantenute a distanza fissa a



Momento di dipolo elettrico

per caratterizzare il comportamento del dipolo elettrico si introduce il vettore “*momento di dipolo elettrico*”

$$\vec{P} = q\vec{a}$$



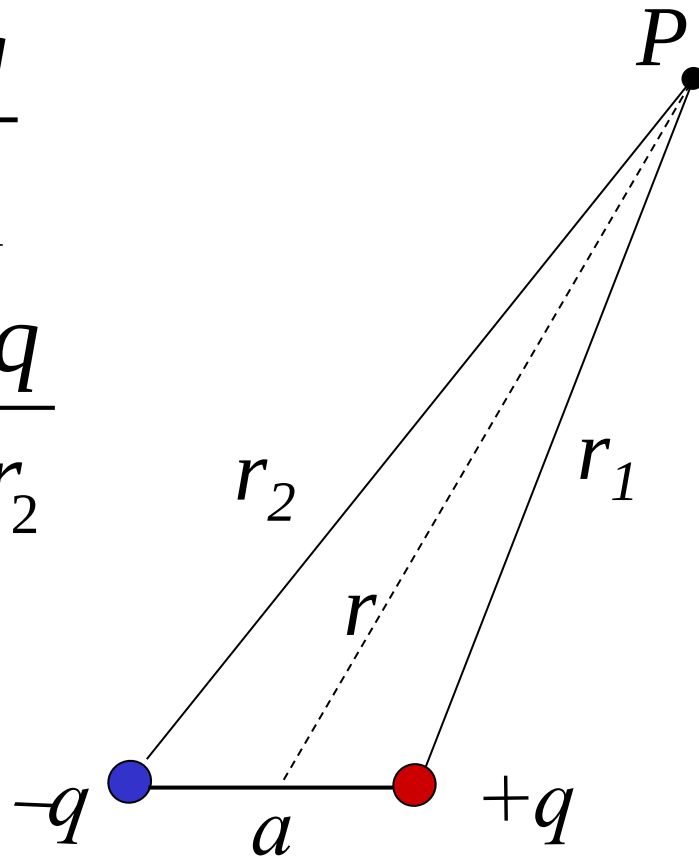
il verso positivo del vettore per definizione va dalla carica elettrica *negativa* a quella positiva

il campo prodotto da un dipolo elettrico si può calcolare facendo uso del principio di sovrapposizione
ma riesce più semplice fare uso del potenziale elettrico

$$V(+q) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1}$$

$$V(-q) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2}$$

per il principio di
sovrapposizione :



$$V(P) = V(+q) + V(-q)$$

$$\begin{aligned}
 V(P) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_2} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)
 \end{aligned}$$

in conclusion :
$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right)$$

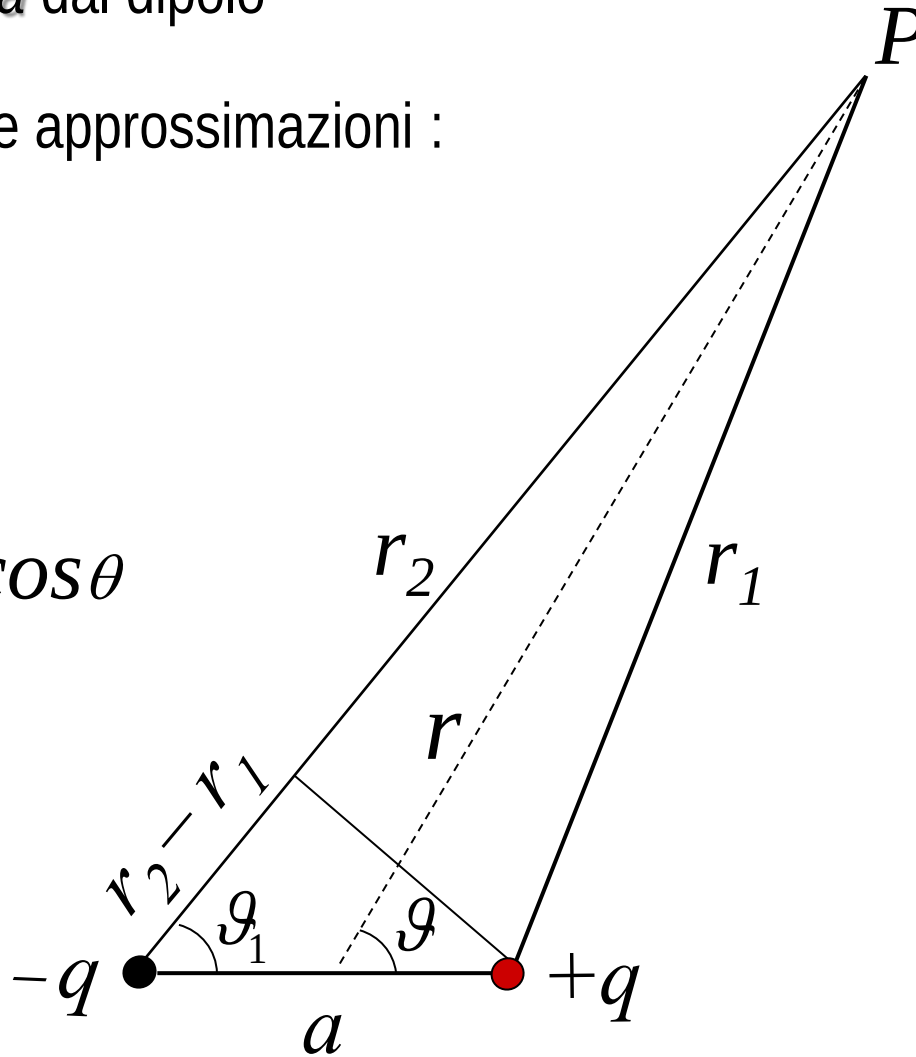
a *grande distanza* dal dipolo

si possono fare le approssimazioni :

$$\vartheta_1 \simeq \vartheta$$

$$r_1 \sim r_2 \sim r \quad \text{e}$$

$$r_2 - r_1 \sim a \cos \theta$$



quindi a grande distanza dal dipolo :

$$V(P) \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{a \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qa \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$\Rightarrow V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{P}| \cos \theta}{r^2}$$

calcoleremo le componenti del campo del dipolo sfruttando

la relazione che lega potenziale e campo

utilizzando le coordinate polari piane

Coordinate polari piane

$$x = \rho \cos \vartheta$$

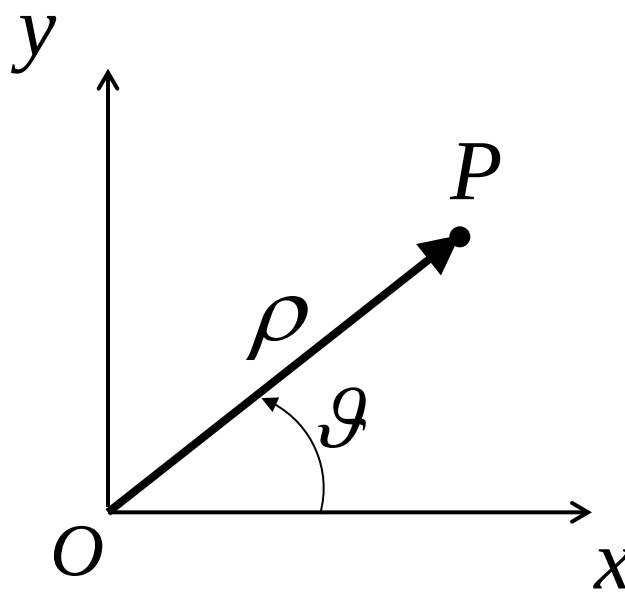
$$y = \rho \sin \vartheta$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$= \rho \cos \vartheta \hat{i} + \rho \sin \vartheta \hat{j}$$

da cui

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho$$



se la “curva coordinata” u_θ e' la curva descritta da $\vec{r}$

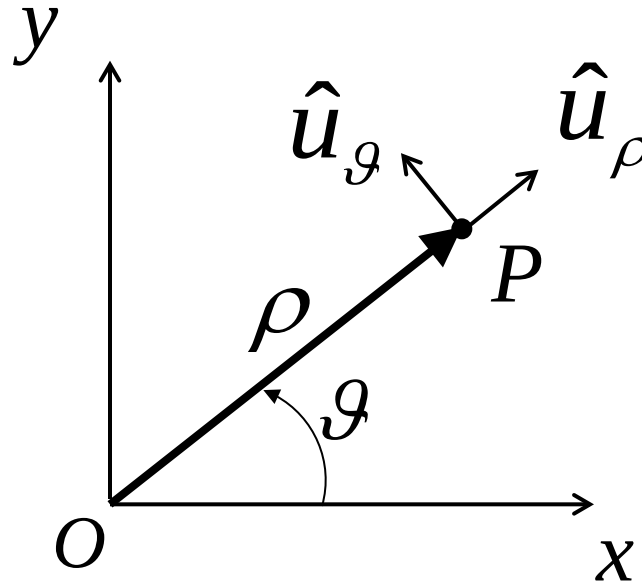
mentre si fa variare θ mantenendo ρ fissa si ha

che il vettore $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ e' tangente alla curva coordinata u_θ

nel punto P

se $\hat{u}_\vartheta$ e' il versore unitario
in questa direzione,

si ha
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| \hat{u}_\vartheta$$



e analogamente per l' altra coordinata curvilinea ρ

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| \hat{u}_\rho$$

se $\vec{r} = \rho(\cos \vartheta \hat{i} + \sin \vartheta \hat{j})$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \cos \vartheta \hat{i} + \sin \vartheta \hat{j}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right| = \sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta} = 1$$

operando in modo analogo per la variabile θ

si ottiene $\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = \rho$

una volta nota l'espressione delle due forme differenziali

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|$$

diviene possibile determinare l'espressione del gradiente,

della divergenza e del rotore in coordinate polari

ad es. l'operatore gradiente di una funzione $f(\rho, \vartheta)$

in coordinate polari piane diviene:

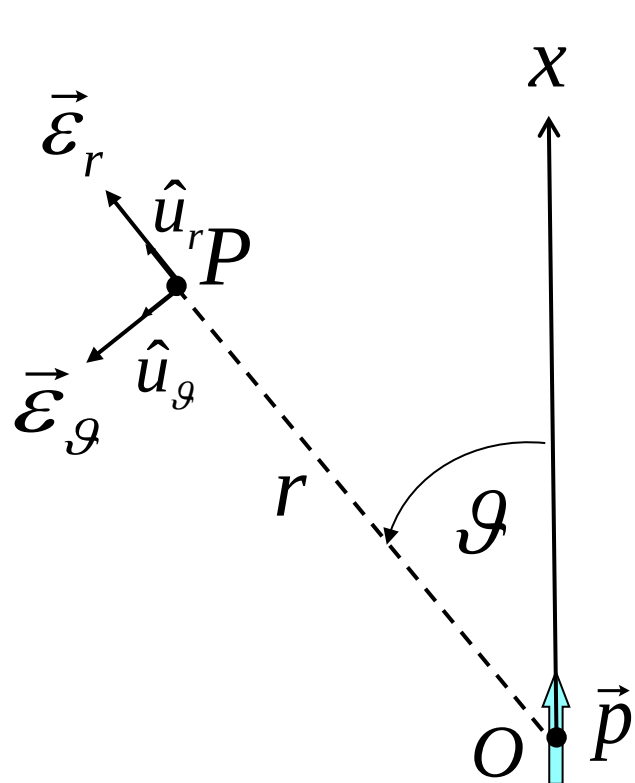
$$\vec{\nabla} f(\rho, \vartheta) = \frac{\partial f(\rho, \vartheta)}{\partial \rho} \hat{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f(\rho, \vartheta)}{\partial \vartheta} \hat{u}_\vartheta$$

nel caso del dipolo elettrico ρ coincide con la distanza radiale r il potenziale a grande distanza dal dipolo e'

$$V(P) = V(r, \vartheta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\vec{P}| \cos \theta}{r^2}$$

dalla espressione del gradiente in coordinate polari piane

e dalla relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ si ricavano le componenti



polari $\vec{\mathcal{E}}_r$ ed $\vec{\mathcal{E}}_\vartheta$ del campo

elettrico $\vec{E}$ prodotto dal dipolo

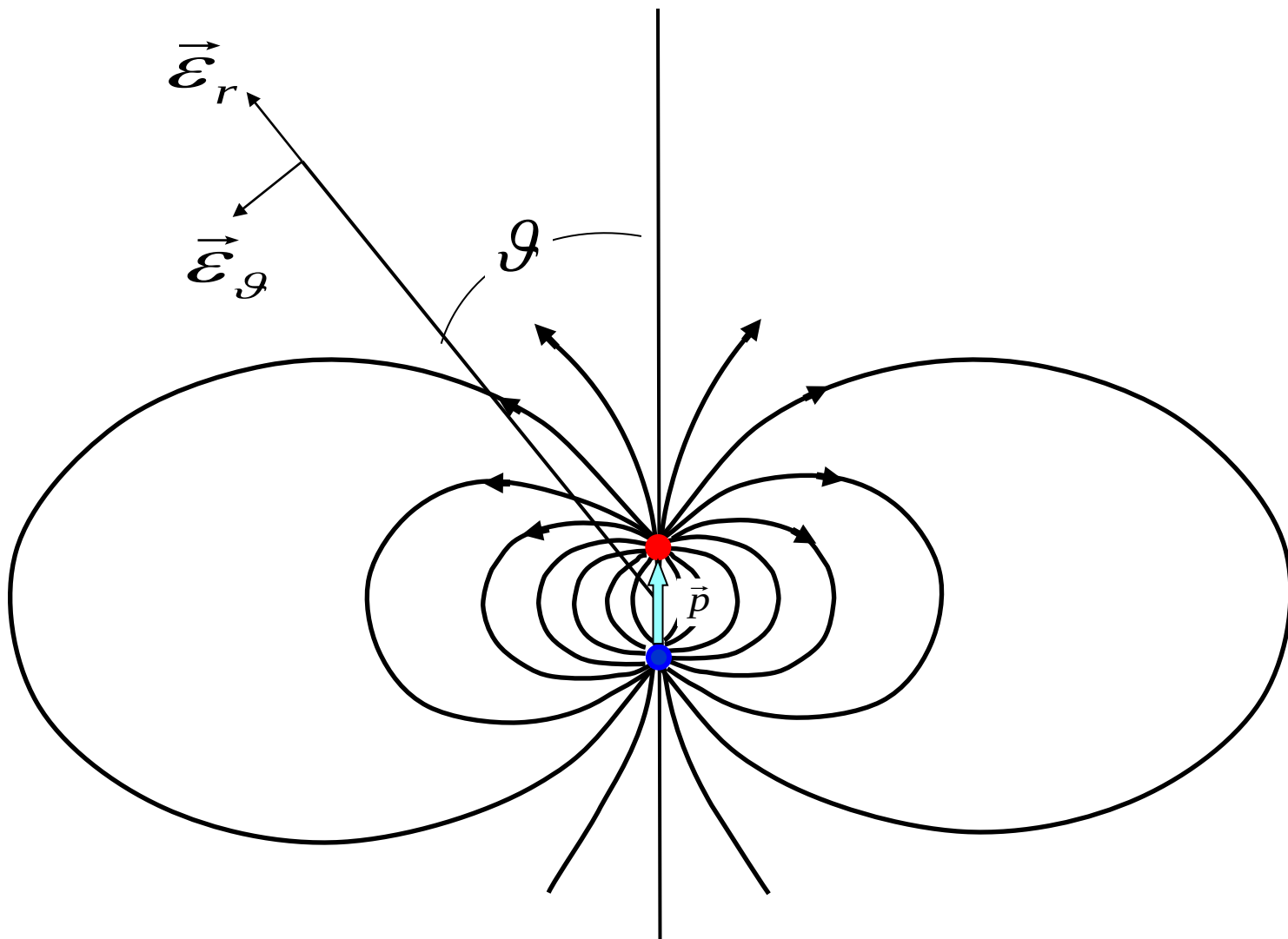
a grande distanza

se $\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_r + \vec{\mathcal{E}}_{\vartheta}$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \hat{u}_{\vartheta}\right) \quad \text{quindi :}$$

$$\vec{\mathcal{E}}_r = -\frac{\partial}{\partial r} V(r, \vartheta) = \frac{2|\vec{P}|\cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{u}_r$$

$$\vec{\mathcal{E}}_{\vartheta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} V(r, \vartheta) = \frac{|\vec{P}|\sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{u}_{\vartheta}$$



Backup Slides