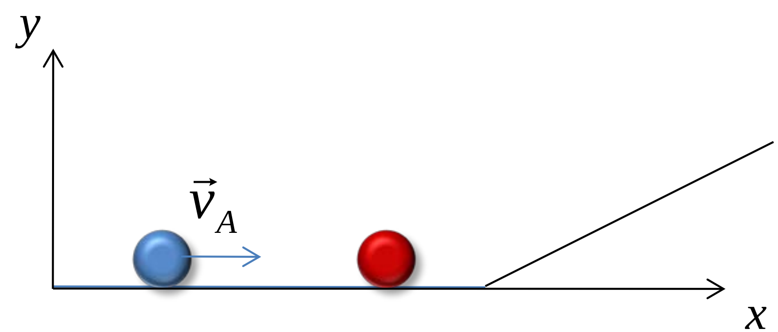
Un corpo puntiforme A di massa m in moto con velocita' $\vec{v}_A$ su di un piano orizzontale liscio urta un corpo B identico se inizialmente il corpo B e' fermo ai piedi di un piano inclinato liscio nel caso entrambi i corpi siano vincolati a restare appoggiati al piano orizzontale prima ed a quello inclinato successivamente determinare la massima quota raggiunta dal corpo B nel caso di urto perfettamente elastico oppure di urto perfettamente inelastico



urto perfettamente elastico

prima dell'urto $\vec{v}_A = v_{x_A}\hat{i}$ e $\vec{v}_B = 0$

dopo l'urto $\vec{v}_A^{\,'} = v_{x_A}^{'}\hat{i}$ e $\vec{v}_B^{\,'} = v_{x_B}^{'}\hat{i}$

nella direzione orizzontale non agiscono sul sistema forze esterne impulsive quindi si potra' imporre la conservazione della quantita' di moto totale lungo l'asse x mentre lungo l'asse y la presenza del piano introduce un vincolo

$mv_{x_A} = mv_{x_A}^{'} + mv_{x_B}^{'}$ dato che l'urto e' perfettamente elastico

si potra' imporre che anche l'energia cinetica si conservi per cui $\frac{1}{2}mv_{x_A}^2 = \frac{1}{2}mv_{x_A}^{'\,2} + \frac{1}{2}mv_{x_B}^{'\,2}$

relazioni che si riducono a $v_{x_A} = v'_{x_A} + v'_{x_B}$ e $v^2_{x_A} = v'^{\,2}_{x_A} + v'^{\,2}_{x_B}$

si tratta di un sistema di due equazioni nelle due incognite v'_{x_A} e v'_{x_B}

quadrando la prima delle due relazioni si ha $v^2_{x_A} = v'^{\,2}_{x_A} + v'^{\,2}_{x_B} + 2v'_{x_A} v'_{x_B}$

uguagliandola alla seconda relazione si ottiene $v'^{\,2}_{x_A} + v'^{\,2}_{x_B} + 2v'_{x_A} v'_{x_B} = v'^{\,2}_{x_A} + v'^{\,2}_{x_B}$

da cui $2v'_{x_A} v'_{x_B} = 0$ ossia $v'_{x_A} v'_{x_B} = 0$ affinche' questa uguaglianza sia soddisfatta

dovra' aversi o che entrambi i fattori siano nulli , ossia che $v'_{x_A} = 0$ e $v'_{x_B} = 0$

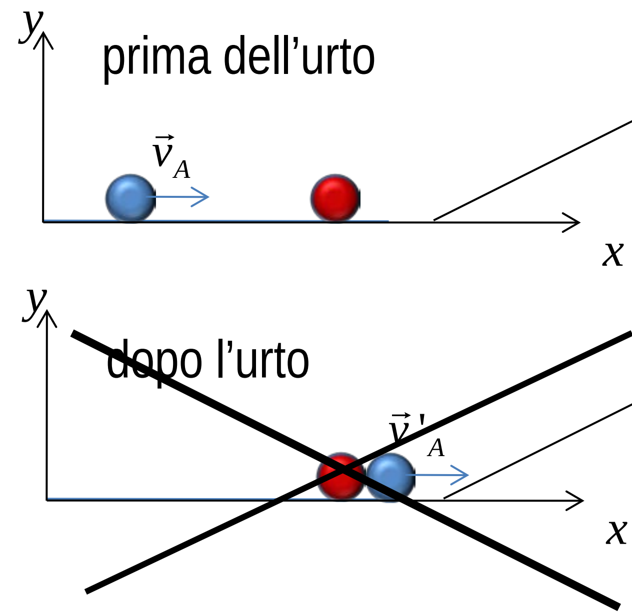
o che $v'_{x_A} \neq 0$ e $v'_{x_B} = 0$ oppure che $v'_{x_A} = 0$ e $v'_{x_B} \neq 0$

ma l'ipotesi che entrambi i fattori siano nulli e' in conflitto con l' ipotesi iniziale che l'urto sia elastico

nello specifico con l'ipotesi che l' energia cinetica sia conservata

infatti inserendo i valori $v'_{x_A} = 0$ e $v'_{x_B} = 0$ nella $\frac{1}{2} m v^2_{x_A} = \frac{1}{2} m v'^{\,2}_{x_A} + \frac{1}{2} m v'^{\,2}_{x_B}$

si otterrebbe $\frac{1}{2} m v^2_{x_A} = 0$ risultato chiaramente in contraddizione le condizioni iniziali



se fosse $v'_{x_A} \neq 0$ e $v'_{x_B} = 0$

significherebbe che il corpo A ha superato il corpo B

e data l'impenetrabilita' della materia cio' sarebbe possibile

solo se il corpo A avesse scavalcato il corpo B

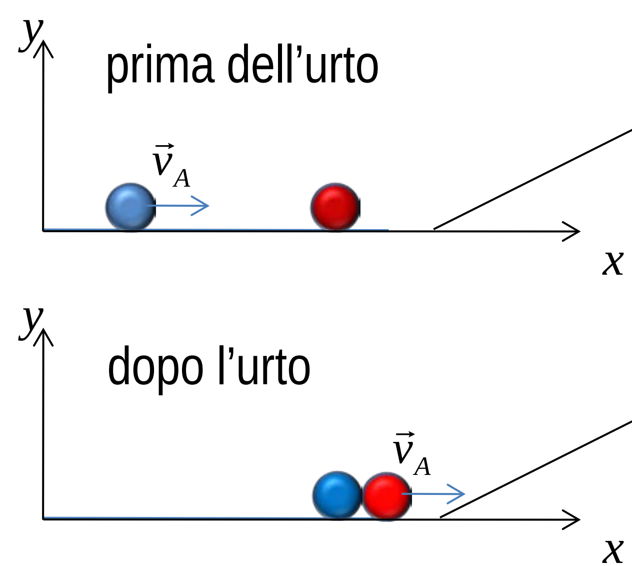
ma questo e' in contraddizione con l'ipotesi iniziale che

entrambi i corpi rimangano vincolati al piano d'appoggio

dunque l'unica soluzione accettabile e' $v'_{x_A} = 0$ e $v'_{x_B} = v_{x_A}$

il che significa che il corpo A si ferma mentre il corpo B si mette in moto con la stessa velocita'

che aveva il corpo di A prima dell'urto



applicando al corpo B dopo l'urto la legge di conservazione

dell'energia meccanica si ottiene

$$\frac{1}{2} m v'^{\,2}_{x_B} = mgh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} v'^{\,2}_{x_B} = gh \quad \text{da cui} \quad h = \frac{1}{2} \frac{v'^{\,2}_{x_B}}{g}$$

ma $v'_{x_B} = v_{x_A}$ quindi $h = \dfrac{v^2_{x_A}}{2g}$

urto perfettamente anelastico

come in precedenza nella direzione orizzontale non agiscono sul sistema forze esterne impulsive

quindi si potra' imporre la conservazione della quantita' di moto totale lungo l'asse x

mentre, dato che l'urto e' perfettamente anelastico, non si potra' piu' pretendere che l'energia

cinetica sia conservata ed in effetti dopo l'urto i due corpi rimangono uniti costituendo

un unico oggettto di massa $2m$ in moto con velocita' v'_{x_F}

applicando all'urto la legge di conservazione della quantita'di moto totale

si ottiene $mv_{x_A} = 2mv'_{x_F}$ da cui $v'_{x_F} = \frac{v_{x_A}}{2}$

applicando al corpo A+ B dopo l'urto la legge di conservazione dell'energia meccanica

si ottiene $\frac{1}{2} 2mv'^{\,2}_{x_F} = 2mgh \Rightarrow \frac{1}{2} v'^{\,2}_{x_F} = gh$ da cui $h = \frac{1}{2} \frac{v'^{\,2}_{x_F}}{g}$ ma $v'_{x_F} = \frac{v_{x_A}}{2}$

quindi $h = \frac{1}{8} \frac{v^2_{x_A}}{g}$