Un' asta omogenea di massa M e lunghezza L e' vincolata ad un estremo in un punto A ed e' tenuta orizzontalmente da una fune collegata all'altro estremo B perpendicolarmente all'asta stessa.

Ad una distanza $L/3$ dall'estremo A e' applicata una forza di modulo F perpendicolare all'asta e diretta verso il basso.

Calcolare le espressioni della reazione vincolare nel punto A e della tensione della fune.

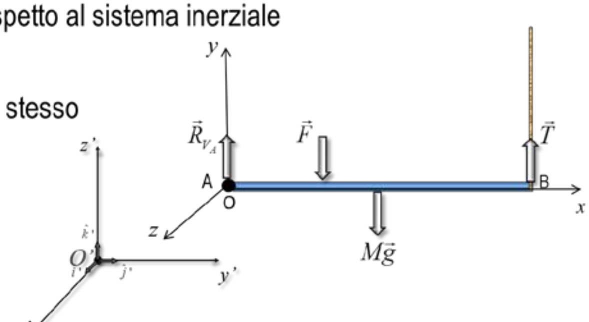
Se a un certo istante la fune si spezzasse determinare l'accelerazione angolare a cui sarebbe soggetta l'asta nell'istante immediatamente successivo alla rottura.

posto $R_{V_A} = |\vec{R}_{V_A}|$ $\quad F = |\vec{F}|$ $\quad P = |\vec{P}|$ $\quad T = |\vec{T}|$ si ha

$$\vec{R}_{V_A} = R_{V_A}\,\hat{j} \qquad \vec{F} = -F\hat{j} \qquad \vec{P} = -Mg\hat{j} \qquad \vec{T} = T\hat{j}$$

la forza peso e' applicata al centro di massa dell'asta che coincide con il suo punto di mezzo dato che la massa e' distribuita in modo omogeneo sull'asta

poiche' A e' un punto fisso rispetto al sistema inerziale conviene scegliere il punto A stesso come polo fisso



le condizioni di equilibrio statico sono $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$

dalla prima relazione $\Rightarrow$ $\vec{R}_{V_A} + \vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0$ ovvero

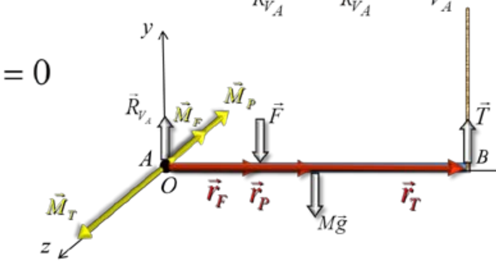
$$(R_{V_A} - F - Mg + T)\,\hat{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{V_A} - F - Mg + T = 0$$

i momenti rispetto al polo fisso A delle forze agenti sono : $\vec{M}_T = \vec{r}_T \times \vec{T}$

$$\vec{M}_P = \vec{r}_P \times \vec{P} \qquad \vec{M}_F = \vec{r}_F \times \vec{F} \qquad \text{e} \qquad \vec{M}_{R_{V_A}} = \vec{r}_{R_{V_A}} \times \vec{R}_{V_A}$$

ma $\vec{r}_{R_{V_A}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{R_{V_A}} = 0$

dalla $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$



$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{R_{V_A}} \times \vec{R}_{V_A} + \vec{r}_F \times \vec{F} + \vec{r}_P \times \vec{P} + \vec{r}_T \times \vec{T} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \times R_{V_A}\,\hat{j} - \frac{1}{3}L\hat{i} \times F\hat{j} - \frac{1}{2}L\hat{i} \times Mg\,\hat{j} + L\hat{i} \times T\hat{j} = 0 \quad \text{ossia}$$

$$(-\frac{1}{3}LF - \frac{1}{2}LMg + LT)\,\hat{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}LF - \frac{1}{2}LMg + LT =$$

la $R_{V_A} - F - Mg + T = 0$ e la $-\frac{1}{3}LF - \frac{1}{2}LMg + LT = 0$

costituiscono un sistema di due equazioni nelle due incognite T e R_{V_A}

dalla prima → $T = F + Mg - R_{V_A}$ valore della tensione che sostituito n

seconda relazione → $-\frac{1}{3}LF - \frac{1}{2}LMg + L(F + Mg - R_{V_A}) = 0$ ovver

$$-\frac{1}{3}LF-\frac{1}{2}LMg+LF+LMg-LR_{V_A}=0$$

da cui $-\frac{1}{3}F-\frac{1}{2}Mg+F+Mg-R_{V_A}=0$

ossia $R_{V_A}=\frac{2}{3}F+\frac{1}{2}Mg$ e sostituendo questo valore nella

$T=F+Mg-R_{V_A}$ si ottiene $T=F+Mg-(\frac{2}{3}F+\frac{1}{2}Mg)$

ossia $T=\frac{1}{3}F+\frac{1}{2}Mg$

in conclusione $R_{V_A}=\frac{2}{3}F+\frac{1}{2}Mg$ e $T=\frac{1}{3}F+\frac{1}{2}Mg$

in questo caso e' evidente che il momento angolare totale $\vec{L}$

e' parallelo ad $\vec{\omega}$ e questo perche' una volta recisa la fune le uniche forze

a momento non nullo agenti sull'asta saranno la forza peso

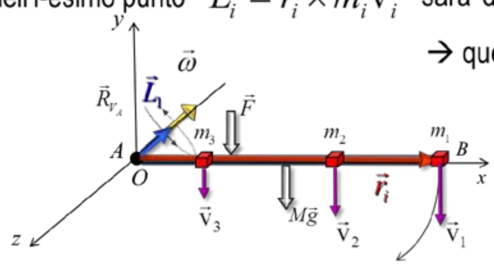
e la forza $\vec{F}$ nell'istante immediatamente successivo

alla rottura della fune l'asta iniziera' a ruotare verso il

basso nel piano xy → $\vec{\omega}(t)=-\omega(t)\hat{k}$

la velocita' dell'i-esimo punto sara' $\vec{v}_i=-v_i\hat{j}$ e il momento angolare

dell'i-esimo punto $\vec{L}_i=\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$ sara' diretto come $\vec{\omega}$



→ questo rimarra' vero per tutti i punti della sbarretta

e dato che il momento d'inerzia e' costante

$$\vec{M}_A=I_A\vec{\alpha}\ =I_A\frac{d\vec{\omega}}{dt}\ \Rightarrow\ \vec{\alpha}=\frac{\vec{M}_A}{I_A}$$

il momento d'inerzia rispetto al centro di massa di una asta omogenea e'

$$I_{CM}=\frac{1}{12}ML^2$$

mentre il momento d'inerzia rispetto al punto A per il teorema di Huygens Steiner

risulta essere $I_A=\frac{1}{3}ML^2$

per il teorema di Huygens Steiner il momento d'inerzia di un corpo esteso

di massa totale M calcolato rispetto ad un asse che si trova a distanza a

da un asse passante per il centro di massa e' dato da

$$I=I_C+Ma^2 \quad \text{con} \quad M=\sum_{i=1}^{n}m_i$$

percio'se $I_{CM}=\frac{1}{12}ML^2\ \Rightarrow\ I_A=\frac{1}{12}ML^2+M\frac{L^2}{4}$

$$\Rightarrow\ I_A=\frac{1}{3}ML^2$$

nell'istante immediatamente susseguente alla recisione della fune

le uniche forze a momento non nullo agenti sull'asta sono la forza peso

e la forza F

il modulo del momento di queste forze rispetto al polo A e'

$$|\vec{\alpha}| = \frac{|\vec{M}_A|}{I_A} = \frac{\frac{1}{3}LF + \frac{1}{2}LMg}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{\frac{1}{3}F + \frac{1}{2}Mg}{\frac{1}{3}ML} = \frac{F + \frac{3}{2}Mg}{ML}$$

$$|\vec{\alpha}| = \frac{F}{ML} + \frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

Backup Slides