

Un disco rigido e omogeneo di massa M e raggio R rotola senza strisciare su una rotaia orizzontale dotata d'attrito, disposta lungo l'asse delle ascisse di un riferimento cartesiano, sotto l'azione d'una forza costante

$$\vec{F} = F\hat{i} \text{ ortogonale all'asse di rotazione.}$$

Nel sistema di riferimento inerziale prescelto

il disco ruota in senso orario nel piano (x,y)

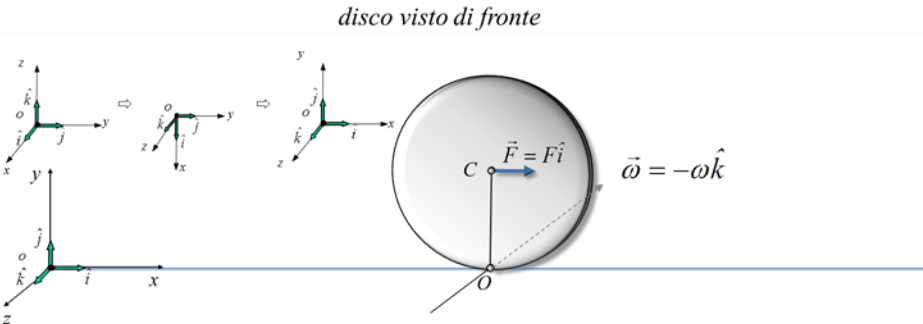
(dove l'asse y è verticale ascendente)

con velocità angolare istantanea $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$

Determinare le espressioni

a) del modulo a_G dell'accelerazione con la quale trasla il centro di massa C del disco

b) della componente tangenziale della forza d'attrito $\vec{R}_t = -R_t\hat{i}$



dalla cinematica del moto dei corpi rigidi sappiamo che la velocità

di un generico punto P_i del corpo rigido e'

$$\vec{V}_i = \vec{V}_{O_P} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

e se nell'istante in cui P_I e' fermo

lo assumiamo come polo O_P

chiaramente in quell'istante si avra' $\vec{V}_{O_P} = 0 \Rightarrow \vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

in questo caso il polo O_P e' istantaneamente fermo rispetto al sistema inerziale

percio' $\vec{V}_{O_P} = 0$ e la seconda equazione cardinale

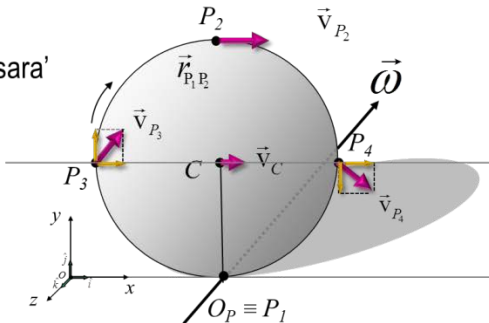
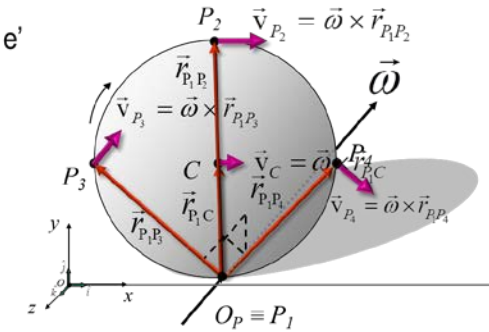
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E - \vec{V}_{O_P} \times M\vec{V}_{CM} \quad \text{si riduce a} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

vista la simmetria e l'omogeneita' della distribuzione delle masse nel corpo

la posizione del centro di massa coincidera' con il centro C del disco

e la velocità' $\vec{V}_{CM}$ del centro di massa sara'

parallela all'asse x



la dinamica del corpo rigido dipende

- dal fatto che il momento angolare totale $\vec{L}$ sia o non sia parallelo alla velocita' angolare $\vec{\omega}$
- dal valore del suo momento d'inerzia I_O rispetto all'asse di rotazione
- dal fatto che il momento d'inerzia I_O sia o non sia costante nel tempo

in questo caso il momento angolare totale del disco rispetto ad O_P sara' parallelo alla velocita' angolare infatti

$$\vec{L}_C = \vec{r}_{P_1C} \times m_C \vec{v}_{P_C} = m_C \vec{r}_{P_1C} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{P_1C}) = \vec{L}_C \parallel \vec{\omega}$$

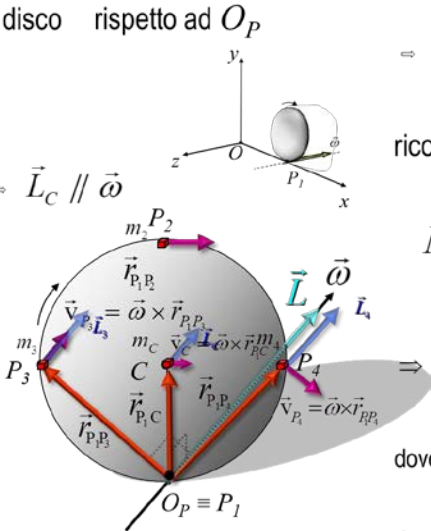
e ovviamente anche $\vec{L}_2 \parallel \vec{\omega}$ etc.

$$\vec{L}_3 = \vec{r}_{P_1P_3} \times m_3 \vec{v}_{P_3} = \vec{L}_3 \parallel \vec{\omega}$$

$$\vec{L}_4 = \vec{r}_{P_1P_4} \times m_4 \vec{v}_{P_4} = \vec{L}_4 \parallel \vec{\omega}$$

$$\text{quindi } \vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \text{ sara' parallelo a } \vec{\omega}$$

e si avra' $\vec{L} = I_O \vec{\omega}$ dove I_O e' il momento d'inerzia rispetto ad O_P



$$\text{dunque } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E \text{ e } \vec{L} = I_O \vec{\omega}$$

$$\text{e poiche' il momento d'inerzia e' costante } \frac{d\vec{L}}{dt} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\text{quanto alle forze esterne il momento risultante } \vec{M}_{m\vec{g}} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g}$$

della forza peso rispetto al polo O_P sara' nullo visto che

il peso del corpo puo' essere pensato come applicato al centro di massa del corpo

$$\Rightarrow \vec{r}_{P_1C} \parallel \vec{g}$$

ricordando che il disco ha massa M e raggio R

$$\vec{M}^E = \vec{R} \times \vec{F} = I_O \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

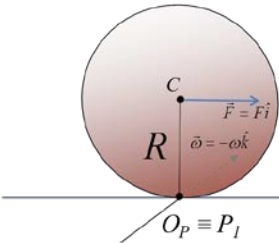
$$\Rightarrow \hat{R}\hat{j} \times F\hat{i} = -(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2) \frac{d\omega}{dt} \hat{k}$$

dove si e' usato il teorema di Huygens Steiner per determinare il momento d'inerzia del disco

rispetto ad O_P infatti il momento d'inerzia del disco rispetto al centro di massa C e'

$$\frac{1}{2}MR^2 \text{ e la distanza tra } C \text{ ed } O \text{ e' } R \text{ quindi}$$

$$I_O = (\frac{1}{2}MR^2 + MR^2) \text{ ossia } I_O = \frac{3}{2}MR^2$$



b) seconda domanda

per determinare la componente tangenziale della forza d'attrito

si utilizza il teorema del moto del centro di massa $\vec{a}_{CM} = \frac{\vec{R}^E}{M}$

dove M e' la massa totale del corpo e $\vec{R}^E$ e' la risultante delle forze esterne

da cui $\vec{R}_t + \vec{F} + M\vec{g} = M\vec{a}_G$

$$(-R_t + F)\hat{i} = Ma_G\hat{i} \quad \text{da cui} \quad -R_t + F = M \frac{2F}{3M} = Ma_G$$

$$R_t = F - Ma_G = F - \frac{2F}{3} = \frac{F}{3} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_t = -\frac{F}{3}\hat{i}$$

rispetto al polo il centro di massa e' istantaneamente in rotazione

lungo una traiettoria circolare con velocita' angolare di modulo ω

quindi da $v = \omega r \rightarrow v_G = \omega r_G$

da cui $\omega = \frac{v_G}{r_G} = \frac{v_G}{R}$

$$-RF\hat{k} = -\frac{3}{2}MR^2 \frac{d\frac{v_G}{R}}{dt} \hat{k}$$

$$-RF\hat{k} = -\frac{3}{2}MR^2 \frac{a_G}{R} \hat{k} \Rightarrow a_G = \frac{2F}{3M}$$

Backup Slides