

Determinare con quale velocita' raggiungera' il suolo un corpo rigido di massa totale m che rotoli senza strisciare su di un piano inclinato privo di attrito assumendo che al tempo $t = 0$ il corpo sia in quiete, e che l'altezza a cui si trova il centro di massa del corpo sia h .

Si assuma inoltre che l'energia potenziale totale del corpo quando il corpo raggiunge il suolo sia nulla di modo che la variazione di energia potenziale sia semplicemente pari a mgh

dato che si e' in assenza di attriti si potra' imporre la conservazione dell'energia meccanica e per determinare l'energia cinetica finale si puo' utilizzare il teorema di Konig dell'energia

$$mgh = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 = \frac{1}{2} I \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

in generale $I = mk^2$ dove k e' il "raggio giratore" del corpo quindi

$$mgh = \frac{1}{2} mk^2 \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

$$\text{ossia } gh = \frac{1}{2} k^2 \frac{v_{CM}^2}{r^2} + \frac{1}{2} v_{CM}^2$$

$$v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{k^2}{r^2}}} < \sqrt{2gh}$$

$$\text{poiche' } v_{CM} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{k^2}{r^2}}}$$

a parita' di massa totale m del corpo e di raggio r per:

una sfera piena omogenea che rotola senza strisciare
 $I = \frac{2}{5} mr^2$ quindi $\frac{k^2}{r^2} = \frac{2}{5} \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{1.43gh}$

un guscio sferico omogeneo che rotola senza strisciare

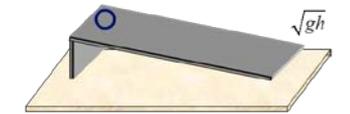
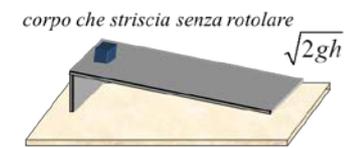
$$I = \frac{2}{3} mr^2 \text{ quindi } \frac{k^2}{r^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{1.20gh}$$

un disco omogeneo che rotola senza strisciare

$$I = \frac{1}{2} mr^2 \text{ quindi } \frac{k^2}{r^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{1.33gh}$$

un anello omogeneo che rotola senza strisciare

$$I = mr^2 \text{ quindi } \frac{k^2}{r^2} = 1 \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{gh}$$



se il corpo scivolasse senza attrito giungerebbe al suolo con velocita' maggiore

pari a $\sqrt{2gh}$ mentre se il corpo rotola senza strisciare

l'energia potenziale iniziale si trasformerà in parte in energia cinetica

di traslazione $\frac{1}{2} m v_{CM}^2$ ed in parte in energia cinetica di rotazione $\frac{1}{2} I \omega^2$

questo spiega perche' il corpo giungera' al suolo con velocita' inferiore

se rotola invece di strisciare

Backup slides