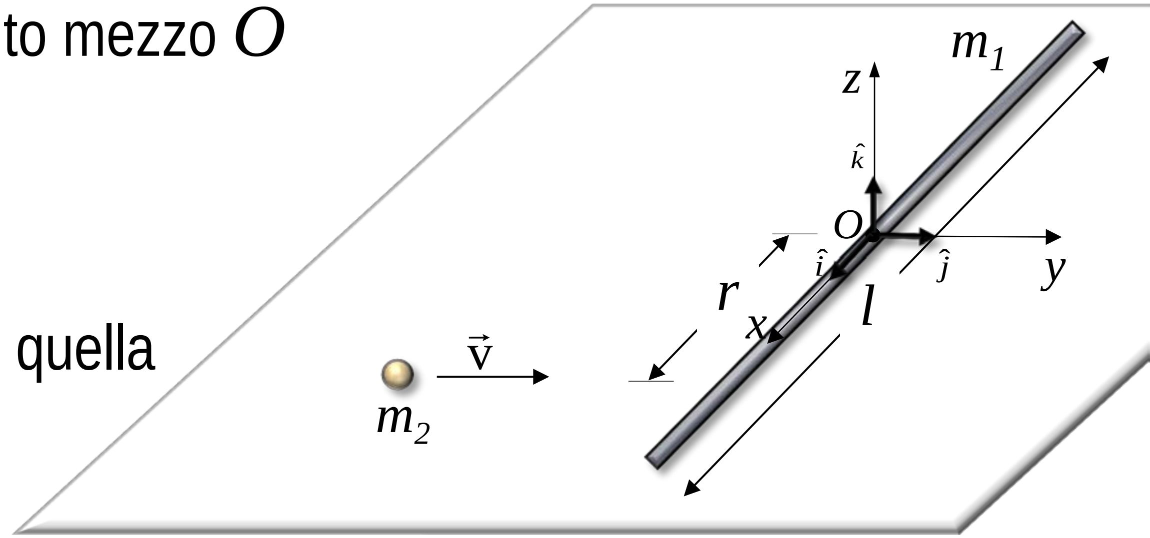
Un asticella omogenea di massa m_1 e lunghezza l e' ferma sopra un

piano orizzontale liscio. Un corpo materiale puntiforme di massa m_2

in moto con velocita' $\vec{v} = v\hat{j}$ perpendicolare alla sbarretta,

la urta a distanza r dal suo punto mezzo O

e vi rimane appiccicato.



Determinare la velocita' lineare e quella

angolare del sistema dopo l'urto

assumeremo come sistema di riferimento fisso un sistema di coordinate

cartesiane ortogonali con centro in O e asse x parallelo all'asse dell'asticella

- il sistema e' costituito dall'asta <u>piu'</u> il punto materiale

durante l'urto agiscono soltanto forze interne quindi il sistema e' isolato

e sara' possibile imporre la conservazione della quantita' di moto totale e

la conservazione del momento angolare totale del sistema

ma dato che l'urto e' perfettamente anelastico, <u>non</u> si potra' imporre

la conservazione dell' energia cinetica

dopo l'urto la velocita' del centro di massa coincidera' con quella del sistema

costituito dall' asta piu' una massa m_2 posta a distanza r dal centro dell'asta la quantita' di moto totale e' $\vec{Q} = m_2 \vec{\mathrm{v}}$ prima dell'urto

e dopo l'urto diviene $\vec{Q}' = (m_1 + m_2)\vec{\mathrm{v}}_{CM}$ imponendo la conservazione

della quantita' di moto totale ossia imponendo che $\vec{Q}' = \vec{Q}$ si ha

$$m_2 \vec{\mathrm{v}} = (m_1 + m_2)\vec{\mathrm{v}}_{CM} \quad \text{da cui} \quad \vec{\mathrm{v}}_{CM} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \vec{\mathrm{v}} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \mathrm{v}\, \hat{j}$$

dato che non vi sono forze esterne agenti sul sistema il centro di massa

si muovera' di moto rettilineo uniforme quindi la velocita' del centro di massa

del sistema asta piu' punto materiale dovra' essere stata la stessa anche

prima dell'urto e tale restera' dopo l'urto per quanto riguarda il moto traslatorio del sistema la massa dell'asta si puo'

trattare come se fosse concentrata nel centro di massa dell' asta

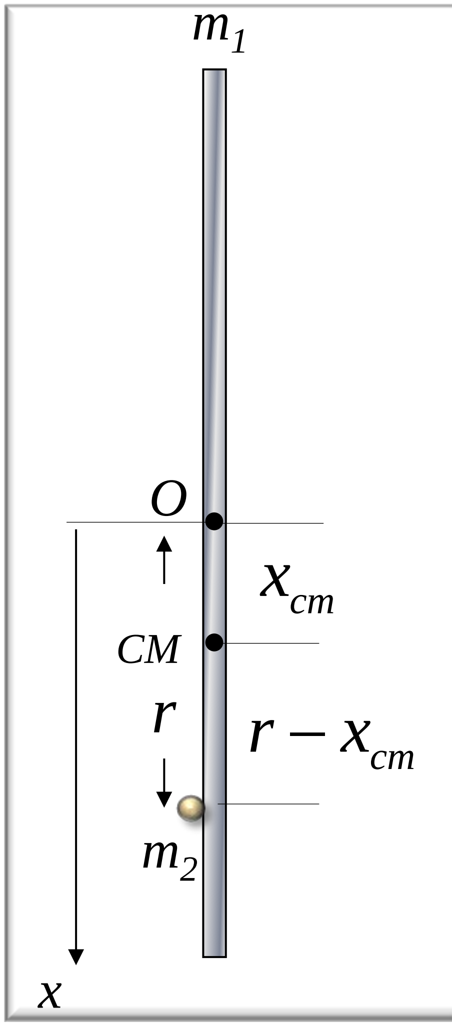
che, prima dell'urto, coincide con l'origine O

- nell'istante in cui avviene l'urto $y_{cm} = z_{cm} = 0$

e la distanza del centro di massa del sistema

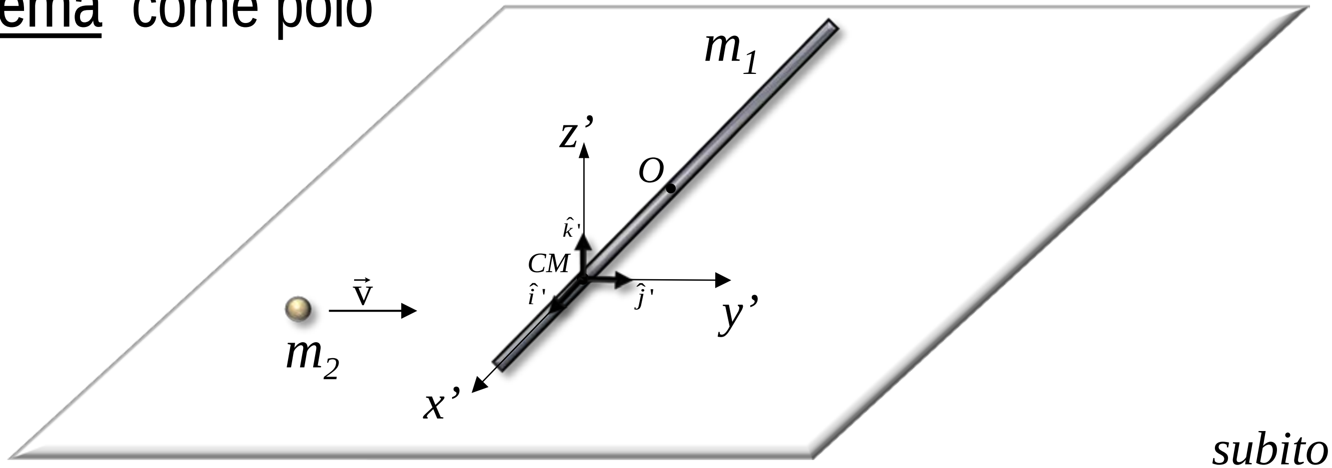
rispetto all'origine O lungo l'asse x sara'

$$x_{cm} = \frac{m_1 0 + m_2 r}{(m_1 + m_2)} \quad \text{ossia} \quad x_{cm} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} r$$

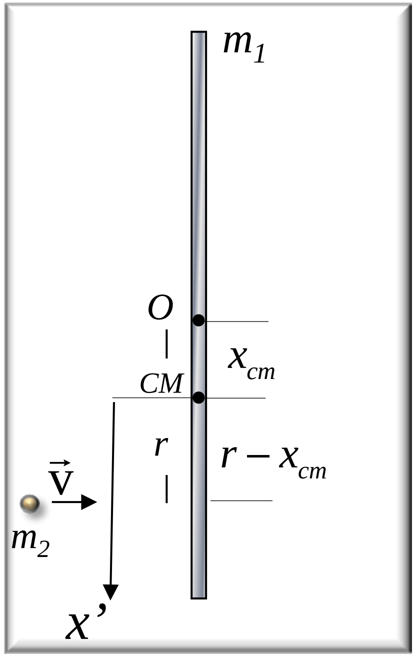


e la distanza tra il centro di massa del sistema CM ed m_2 sara' $r - x_{cm}$

per analizzare il moto rotatorio del sistema conviene assumere il <u>centro di massa del sistema</u> come polo



subito prima dell'urto

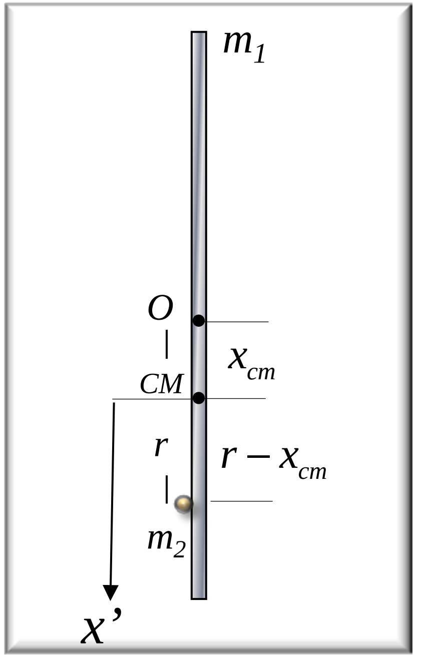


subito prima prima dell'urto l'asticella e' ferma percio'

$$\vec{L} = 0 + (r - x_{CM})\hat{i}' \times m_2 \mathrm{v} \hat{j}'$$

ossia $$\vec{L} = (r - x_{CM}) m_2 \mathrm{v} \hat{k}'$$

subito dopo l'urto $\vec{L}' = I_{CM}\omega\hat{k}'$



imponendo la conservazione del momento angolare totale

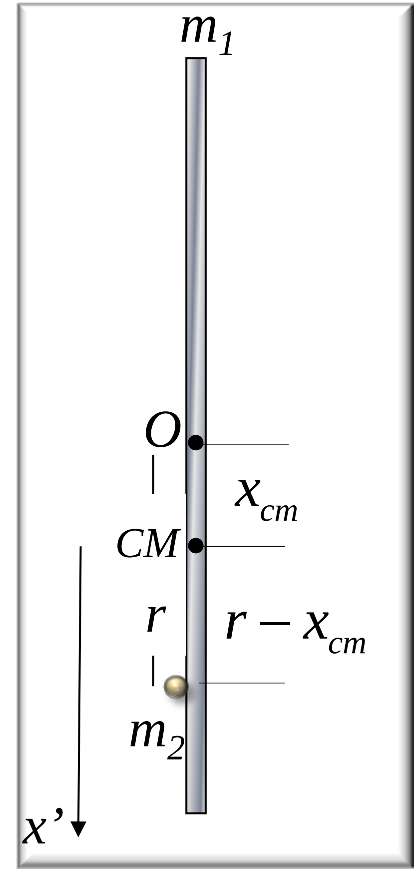
$$(r - x_{CM})m_2\mathrm{v} = I_{CM}\omega$$

da cui $$\omega = \frac{(r - x_{CM})m_2\mathrm{v}}{I_{CM}}$$

il momento d'inerzia rispetto al centro di massa sara'

$$I_{CM} = \underbrace{I_{O_{m_1}} + m_1 (O - CM)^2}_{\text{teorema di Huygens Steiner}} + \underbrace{I_{CM_{m_2}}}_{\text{momento d'inerzia di } m_2 \text{ rispetto a CM}}$$

vista dall'alto

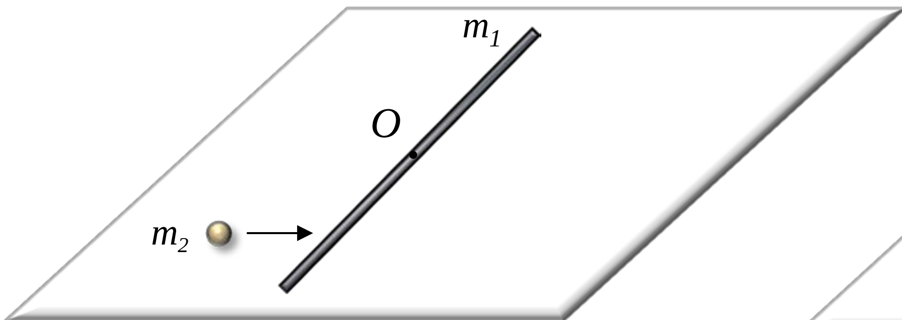


$$\Rightarrow \quad I_{CM} = m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (r - x_{CM})^2$$

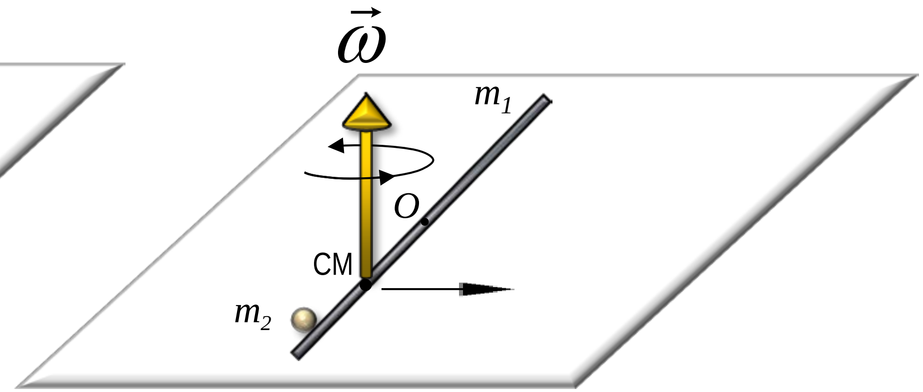
quindi la velocita' angolare sara'

$$\omega = \frac{(r - x_{CM}) m_2 \mathrm{v}}{m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (r - x_{CM})^2} = \frac{r m_2 \mathrm{v}}{(m_1 + m_2)\frac{l^2}{12} + m_2 r^2}$$

in questo caso la rotazione avverra' in senso antiorario se invece l'urto fosse avvenuto con r al di sopra del centro di massa la rotazione sarebbe stata oraria



prima dell'urto



dopo l'urto

dopo l'urto il centro di massa continuera' a muoversi di moto rettilineo uniforme mentre gli altri punti dell'asta avranno un moto composto da una traslazione con velocita' pari a quella del centro di massa e da una rotazione con velocita' angolare ω rispetto ad un asse perpendicolare al piano e passante per il centro di massa casi particolari :

- se $m_1 = m_2 = m$ si avrebbe

$$x_{CM} = \frac{1}{2} r \qquad \mathrm{v}_{CM} = \frac{1}{2} \mathrm{v} \qquad \omega = \frac{r\mathrm{v}}{\frac{l^2}{6} + r^2}$$

- se la pallina urtasse l'asticella esattamente all'altezza del centro di

  massa dell'asta ossia se $r = 0$ si avrebbe $\omega = 0$

  e il moto sarebbe di pura traslazione

Backup slides