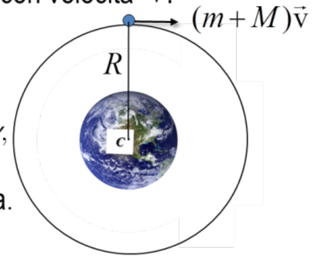
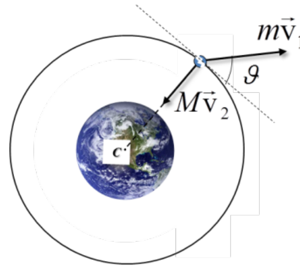
Un satellite di massa *(m +M)*, da considerarsi puntiforme, percorre un'orbita circolare di raggio R attorno al centro C della terra con velocita' $\vec{v}$.



Determinare l'espressione del modulo v della velocità del satellite in funzione della costante gravitazionale γ, della massa M_T della terra e del raggio R dell'orbita.

Ad un certo istante, a seguito di un'esplosione interna, la parte di massa m del satellite viene lanciata verso l'esterno dell'orbita con velocità di modulo v_1 che forma un angolo di $45°$ con la tangente all'orbita originaria del satellite, mentre la parte del satellite di massa M a causa dell'esplosione atterra verticalmente al suolo.

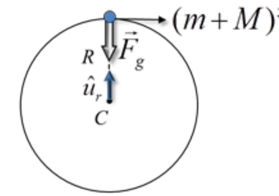


Determinare l'espressione del modulo delle velocità v_1 e v_2 in funzione di γ, M_T, R, m ed M.

Determinare la distanza minima R_{min} dal centro C della terra raggiunta dalla massa m dopo l'esplosione nel caso $m = M$, sapendo che in tale posizione la velocità della massa m ha direzione perpendicolare al suo vettore posizionale rispetto a C.

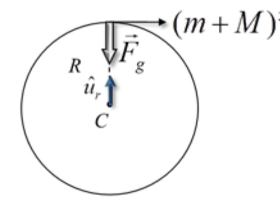
- per iniziare dovremo trovare la risultante delle forze esterne agenti sul sistema assumendo che il sistema sia composto solamente dal satellite e dalla terra se ignoriamo gli effetti della presenza del sole, della luna, degli altri pianeti, etc. riesce che sul sistema agiscono solo forze interne → il sistema e' isolato

per determinare l'accelerazione del satellite dovremo poi applicare la seconda legge della dinamica alla massa del satellite $\vec{F} = m_s\vec{a}$ considerato che in questo caso l'unica forza che agisce sul satellite e' l'attrazione gravitazionale terrestre $\vec{F}_g = -\gamma \dfrac{m_s M_T}{R^2}\hat{u}_r$ quindi



$$m_s\vec{a} = -\gamma \frac{m_s M_T}{R^2}\hat{u}_r \quad \text{da cui} \quad \vec{a} = -\gamma \frac{M_T}{R^2}\hat{u}_r$$

dalle leggi di Keplero e di Newton sappiamo che la forza gravitazionale e' centrale dunque sara' la forza gravitazionale a fornire l' accelerazione centripeta necessaria per mantenere il satellite in orbita



in generale $\vec{F} = m_s\vec{a} = m_s\vec{a}_t + m_s\vec{a}_c$

la forza e' puramente centrale → $\vec{F} \parallel R\hat{u}_r$ e in questo caso il moto e' circolare → $R\hat{u}_r \perp \vec{v}$ ossia $R\hat{u}_r \perp v\hat{t}$ se ne conclude che

$$m_s\vec{a}_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m_s\vec{a}_c$$

dalla cinematica sappiamo che

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{R}\hat{u}_r \quad \text{dove} \quad v = |\vec{v}|$$

quindi da $\vec{a} = -\gamma \dfrac{M_T}{R^2}\hat{u}_r$ otteniamo $-\dfrac{v^2}{R}\hat{u}_r = -\gamma \dfrac{M_T}{R^2}\hat{u}_r$

ossia $$v = \sqrt{\gamma \frac{M_T}{R}}$$

Per rispondere alla richiesta di determinare l'espressione del modulo

delle velocità v_1 e v_2 in funzione di γ, M_T, R, m ed M

visto che il sistema e' isolato potremo avvalerci della legge di conservazione

della quantita' di moto totale in effetti dalla prima equazione cardinale $\vec{R}^e = \dfrac{d\vec{Q}_T}{dt}$

se $\vec{R}^e = 0$ ⇨ $\dfrac{d\vec{Q}_T}{dt} = 0$ quindi $\vec{Q}_T = costante$

prima dell'esplosione $\vec{Q}_T = (m+M)\vec{v}$

dopo l'esplosione $\vec{Q}_T^{'} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2$

e per la conservazione della quantita' di moto totale si ha

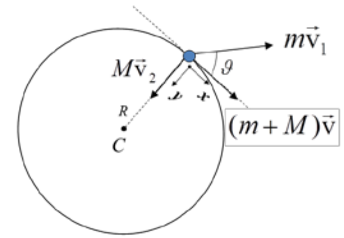
$$(m+M)\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2$$

dalle informazioni fornite nel testo dobbiamo dedurre che il tutto avviene nel piano

dell'orbita quindi il problema e' bidimensionale scegliamo di descrivere il moto

rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xy

orientati come in figura



una volta determinato il sistema di riferimento

proiettiamo la quantita' di moto totale lungo

i due assi cartesiani xy l'angolo θ e' noto ed e' di 45° per cui

$sen45° = cos45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ posto $v_1 = |\vec{v}_1|$ e $v_2 = |\vec{v}_2|$ si ha

lungo la x $(m+M)v = mv_1\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⇨ $v_1 = \dfrac{2}{\sqrt{2}}\dfrac{(m+M)}{m}v = \sqrt{2}\dfrac{(m+M)}{m}v$

lungo la y $0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}mv_1 + Mv_2$ ⇨ $Mv_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}mv_1$ ⇨ $v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{m}{M}v_1$

sostituendo in v_2 il valore di v_1 trovato in precedenza

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{m}{M}\left(\sqrt{2}\frac{(m+M)}{m}\right)v = \frac{(m+M)}{M}v$$

in conclusione $v_1 = \sqrt{2}\dfrac{(m+M)}{m}v$ e $v_2 = \dfrac{(m+M)}{M}v$

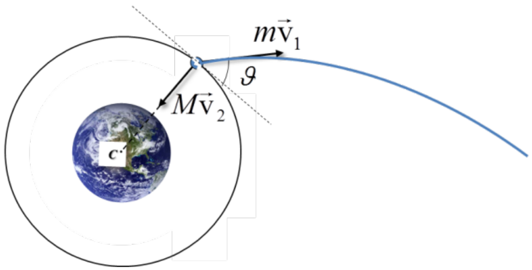
vi sono tre possibili scenari a seconda del modulo v_1 della velocita $\vec{v}_1$

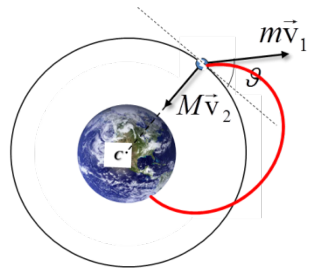
- $v_1 \geq v_{fuga}$ quindi

  $R \to \infty \;\Rightarrow\; R_{min} = R$

- cade sulla Terra

  $\Rightarrow\; R_{min} = R_T$

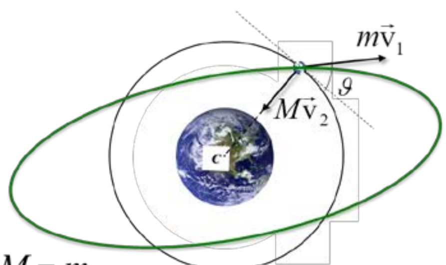




- orbita chiusa

e' chiaro che ci troviamo in questa

situazione $\Rightarrow\; R_{min} = ?$



dal testo dell'esercizio sappiamo che $M = m$

e dato che $$v_1 = \sqrt{2}\,\frac{(m+M)}{m}\,v$$

si ha $v_1 = 2\sqrt{2}\,v$ ma $v = \sqrt{\gamma \frac{M_T}{R}}$ per cui

$$v_1 = 2\sqrt{2\gamma \frac{M_T}{R}} \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{8\gamma \frac{M_T}{R}}$$ se indichiamo

con v_1' il modulo della velocita' posseduta dal frammento del satellite

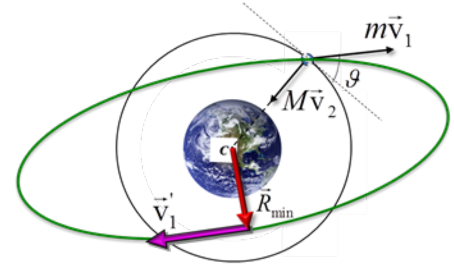
nel momento in cui raggiunge il raggio minimo R_{min} sappiamo che

in tale posizione la velocità della massa m ha direzione perpendicolare al suo

vettore posizionale rispetto a C ossia sappiamo che $\vec{R}_{min} \cdot \vec{v}_1' = 0$

si tratta di un problema a due incognite

$$v_1' = \left|\vec{v}_1'\right| \quad \text{e} \quad R_{min} = \left|\vec{R}_{min}\right|$$



quindi avremo bisogno di due relazioni indipendenti

la forza gravitazionale e' conservativa quindi ignorando gli attriti potremo imporre

la conservazione dell' ***energia meccanica totale***

assumendo C come polo fisso dato che $\vec{F}_g$ e' sempre antiparallela a $\vec{R}$

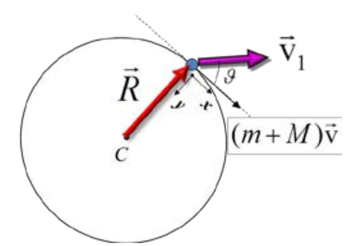
$$\Rightarrow\; \vec{M}_g = \vec{R} \times \vec{F}_g = 0$$

quindi per la seconda equazione cardinale $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = 0$

e da cio' ne consegue che $\vec{L} = costante$

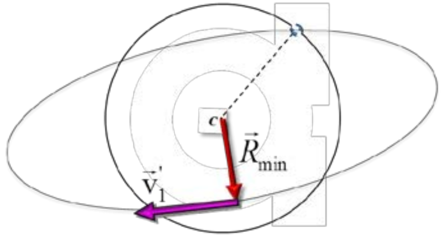
al momento dell'esplosione $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}_1$

$$\left|\vec{L}\right| = R m v_1 sen45°$$



nel momento in cui la massa m raggiunge il raggio minimo $\vec{L} = \vec{R}_{\min} \times m\vec{v}_1'$

$\Rightarrow \quad |\vec{L}| = m v_1' R_{min} sen 90°$



uguagliando

$$m v_1 R sen 45° = m v_1' R_{min} sen 90°$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} m v_1 R = m v_1' R_{min} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 R = v_1' R_{min}$$

$$\Rightarrow \quad v_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{R_{min}} v_1$$

per la conservazione dell' *energia meccanica*

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \gamma \frac{m M_T}{R} = \frac{1}{2} m v_1'^2 - \gamma \frac{m M_T}{R_{min}} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_1'^2 = \gamma \frac{m M_T}{R} - \gamma \frac{m M_T}{R_{min}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_1'^2) = \gamma m M_T \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{min}}\right)$$

ossia $\quad \frac{1}{2}(v_1^2 - v_1'^2) = \gamma M_T \left(\frac{R_{min} - R}{R R_{min}}\right)$

ricordando che si aveva $\quad v_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{R_{min}} v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1'^2 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_{min}^2} v_1^2$

il termine $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_1'^2)$ diviene

$$\frac{1}{2}\left(v_1^2 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{R_{min}^2} v_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{R_{min}^2}\right) v_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2R_{min}^2 - R^2}{2R_{min}^2}\right) v_1^2 \quad = \frac{2R_{min}^2 - R^2}{4R_{min}^2} v_1^2$$

quindi $\quad \frac{2R_{min}^2 - R^2}{4R_{min}^2} v_1^2 = \gamma M_T \frac{R_{min} - R}{R R_{min}}$

semplificando R_{min} al denominatore

$$\frac{2R_{min}^2 - R^2}{4R_{min}} v_1^2 = \gamma M_T \frac{R_{min} - R}{R} \quad \text{ossia}$$

$$(2R_{min}^2 - R^2) R v_1^2 = 4\gamma M_T R_{min} (R_{min} - R)$$

dato che risultava $\quad v_1 = \sqrt{8\gamma \frac{M_T}{R}} \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = 8\gamma \frac{M_T}{R}$

$$(2R_{min}^2 - R^2) 8\gamma \frac{M_T}{R} R = 4\gamma M_T R_{min} (R_{min} - R) \qquad \text{semplificando } R$$

$$2(2R_{min}^2 - R^2) = R_{min}(R_{min} - R) \quad \text{ossia} \quad 4R_{min}^2 - 2R^2 = R_{min}^2 - R R_{min}$$

$$4R_{min}^2 - 2R^2 - R_{min}^2 + R R_{min} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3R_{min}^2 + R R_{min} - 2R^2 = 0$$

$$R_{min} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 24R^2}}{6} = \frac{-R \pm 5R}{6}$$

$R_{min} = -R \;\; oppure \;\; R_{min} = \frac{2}{3} R \quad$ ovviamente la soluzione accettabile

dal punto di vista fisico e' $\; R_{min} = \frac{2}{3} R$

Backup Slides