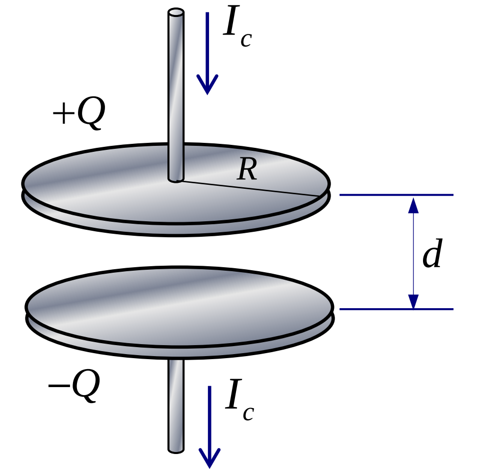
Un condensatore a facce piane e parallele viene caricato collegandolo ad un *generatore di corrente* di modo che durante la carica del condensatore la corrente di conduzione I_c sia costante .



Le armature del condensatore hanno superficie $A = \pi R^2$ sono poste a distanza d e sono nel vuoto. Trascurando gli effetti di bordo

- determinare il modulo della densita' di corrente di spostamento J_s e il valore della corrente di spostamento I_s

- determinare il modulo del campo magnetico tra le armature del condensatore

- determinare la direzione del vettore di Poynting sulla superficie esterna delle armature del condensatore

- dimostrare che il ritmo con cui l'energia entra nel volume racchiuso dall'intercapedine e' uguale al ritmo con cui aumenta l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore

Risoluzione :

collegando il condensatore ad un *generatore di corrente* (*cosa sara' mai ?*)

durante la carica del condensatore la corrente di conduzione I_c sara' costante

quindi si avra' :

carica sulle armature $Q(t) = I_c t$

densita' di carica $\sigma(t) = \dfrac{Q(t)}{A} = \dfrac{I_c t}{A}$

campo elettrico tra le armature $\left|\vec{E}(t)\right| = E(t) = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \dfrac{I_c\ t}{\varepsilon_0 A}$

Teorema di Ampere Maxwell :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{Tot} = \mu_0 (I_c + I_s) = \mu_0 I_c + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{\Sigma})$$

da notare che l'integrale su $\vec{B}$ e' calcolato lungo un percorso *chiuso* Γ, mentre l' integrale su $\vec{E}$ e' calcolato lungo una superficie *aperta* Σ *concatenata* con il percorso Γ

$$\vec{J}_s = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

J_s e' la "densita' di corrente di spostamento" di Maxwell

$$I_s = \int_\Sigma \vec{J}_s \cdot d\vec{\Sigma}$$

I_s e' la "corrente di spostamento"

in questo caso, dato che $E(t) = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} = \dfrac{I_c\ t}{\varepsilon_0 A}$ si ha

$$\left|\vec{J}_S\right| = J_S = \varepsilon_0 \frac{\partial\left|\vec{E}\right|}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{I_c\ t}{\varepsilon_0 A}\right) = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{I_c\ t}{\varepsilon_0 A}\right) = \frac{I_c}{A}$$

e poiche' $I_s = \int_\Sigma \vec{J}_s \cdot d\vec{\Sigma}$

integrando sulla superficie A delle armature si ottiene

$$I_s = J_s A = \frac{I_c}{A} A = I_c$$

dunque il modulo del vettore densita' di corrente di spostamento vale

$$\left|\vec{J}_S\right| = J_S = \frac{I_c}{A}$$

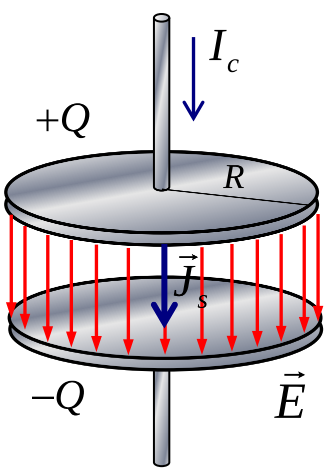
e la corrente di spostamento risulta $I_s \equiv I_c$

Tabella riassuntiva

	Corrente di conduzione	Corrente di spostamento	Corrente totale
dentro i fili del circuito elettrico	I_c	0	I_c
nell'intercapedine del condensatore	0	I_c	I_c

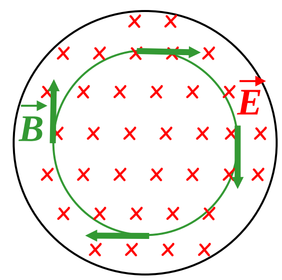
quindi la corrente totale e' continua ovunque !

il campo $\vec{E}$ avra' direzione dalla armatura caricata positivamente a quella caricata negativamente e tale sara' la direzione del vettore densita' di corrente di spostamento le armature del condensatore sono due piatti circolari di raggio R, e area $A = \pi R^2$



se si trascurano gli effetti di bordo

vista dall'alto



per considerazioni di simmetria

il campo magnetico sara' circolare

il campo elettrico $\vec{E}$ tra le armature del condensatore e' entrante nel foglio ed e' crescente nel tempo

utilizzando il teorema di Ampere

e prendendo come percorso Γ di integrazione un circuito circolare piano

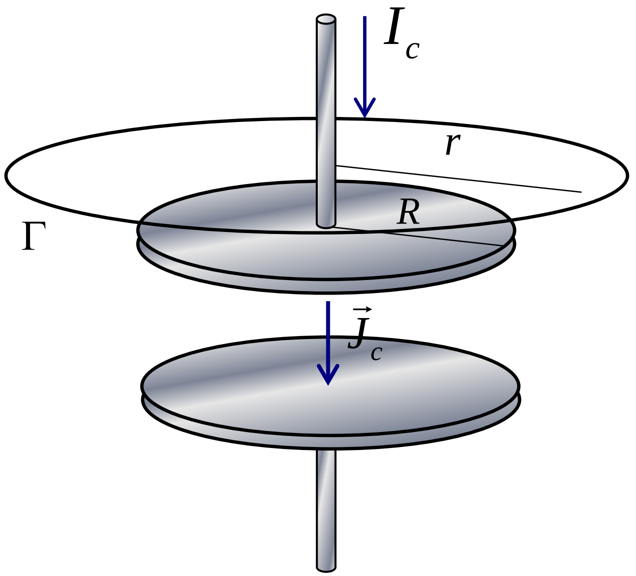
concentrico al filo
$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_c + I_s)$$

si hanno due possibilita' : $r > R$ e $r > R$

per $r > R$ se il circuito Γ " inanella " i fili

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0(I_c + I_s)$$

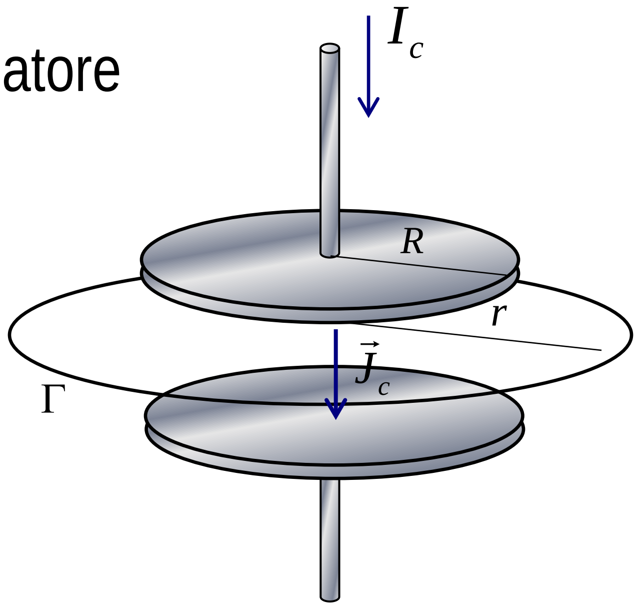
$$\equiv \mu_0 I_c \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}$$



per $r > R$ se il circuito Γ " inanella " il condensatore

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0(I_c + I_s)$$

$$= \mu_0 I_s \equiv \mu_0 I_c \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}$$

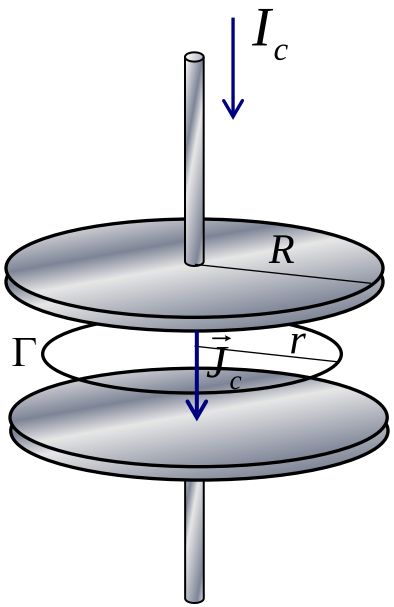


- in conclusione: per $r > R$ il campo magnetico e' lo stesso

di quello generato da un filo rettilineo indefinito

quindi all'esterno del condensatore l'interruzione dovuta

al condensatore non appare grazie alla presenza della corrente di spostamento per $r < R$:



$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi r = \mu_0 I_{Tot} \equiv \mu_0 I_s$$

$$\Rightarrow \quad B2\pi r = \mu_0 (J_s \pi r^2) \quad \Rightarrow B = \mu_0 \frac{J_s \pi r^2}{2\pi r}$$

quindi in questo caso $B = \mu_0 \dfrac{J_s r}{2}$ e dato che

$$\left|\vec{J}_S\right| \equiv J_S = \frac{I_c}{A} = \frac{I_c}{\pi R^2} \Rightarrow B = \mu_0 \frac{I_c r}{2\pi R^2}$$

- in conclusione la risposta alla seconda domanda e' che il

il modulo del campo magnetico tra le armature vale $B = \mu_0 \dfrac{I_c r}{2\pi R^2}$

in sintesi il modulo del campo magnetico tra le armature del condensatore

per $r < R$ vale $$B(r) = \mu_0 \frac{I_c r}{2\pi R^2}$$

mentre per $r > R$ vale $$B(r) = \frac{\mu_0 I_c}{2\pi r}$$

da notare come per $r = R$ si abbia continuita' nel campo magnetico

in quanto usando entrambe le formule risulta sempre :

$$B(R) = \mu_0 \frac{I_c}{2\pi R}$$

densita' di energia elettrostatica $\varepsilon_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

energia elettrostatica immagazzinata nel volume dell' intercapedine

$$U = \varepsilon_E \; V = Ad \; \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

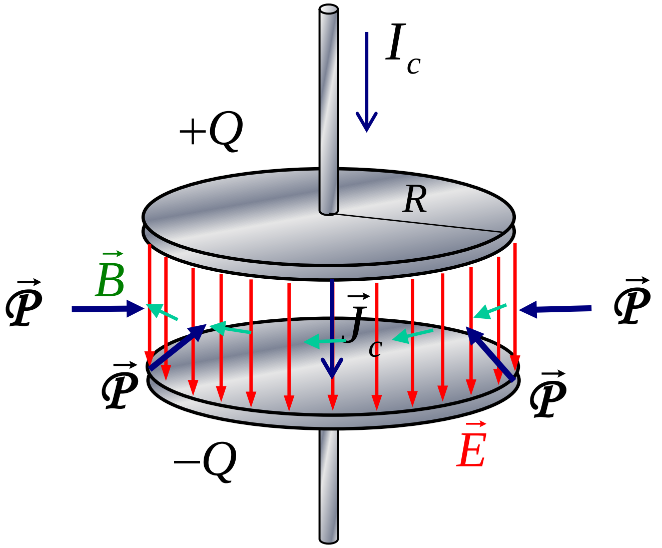
ritmo con cui aumenta l'energia elettrostatica nell'intercapedine → $\frac{dU}{dt}$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Ad \; \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 Ad \; \frac{d}{dt}\left(E^2\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 Ad \; 2E\frac{dE}{dt}$$

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 Ad \; E\frac{dE}{dt}$$ da $$E(t) = \frac{I_c \; t}{\varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 A d \, \frac{I^2{}_c \, t}{\varepsilon^2{}_0 A^2} = \frac{I^2{}_c \, t}{\varepsilon_0 A} d$$ in conclusione $$\frac{dU}{dt} = \frac{I^2{}_c \, t}{\varepsilon_0 A} d$$

indicando con il simbolo $\vec{\mathcal{P}}$ il vettore di Poynting



per definizione si ha : $\vec{\mathcal{P}} = \dfrac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

considerato il verso di $\vec{E}$ e di $\vec{B}$ se ne

deduce che $\vec{\mathcal{P}}$ deve essere entrante

attraverso la superficie laterale dell’intercapedine vista la simmetria del problema

il modulo di $\vec{\mathcal{P}}$ sara’ costante sulla superfice laterale del condensatore

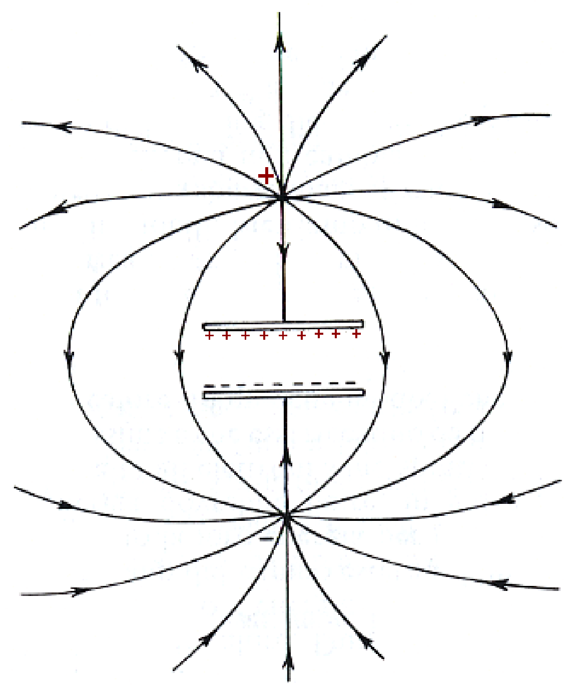
il flusso del vettore di Poynting sulla superficie laterale dell’intercapedine sara’

$$\int_\Sigma \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\Sigma} = S2\pi Rd \quad = \frac{1}{\mu_0} EB2\pi Rd =$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{I_c\ t}{\varepsilon_0 A}\right)\left(\mu_0 \frac{I_c}{2\pi R}\right)2\pi Rd = \frac{I^2{}_c\ t}{\varepsilon_0 A} d$$

risultato che confrontato con $\dfrac{dU}{dt} = \dfrac{I^2{}_c\ t}{\varepsilon_0 A} d$

dimostra che $\int_\Sigma \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{\Sigma} = \dfrac{dU}{dt}$



questo significa che l'energia immagazzinata

nel condensatore non entra dai fili

ma attraverso lo spazio attorno ai fili ed

alle armature del condensatore

Backup Slides