Una sfera piena omogenea di massa m e raggio r e’ posta sopra un piano

orizzontale scabro inizialmente la sfera e’ ferma

successivamente viene applicato un impulso orizzontale $\vec{J}$

la cui retta d’azione passa per il centro della sfera.

Determinare, trascurando l’attrito statico, il moto della sfera

(gioco del biliardo con stecca)

la forza di attrito non reagisce impulsivamente percio' la sfera non e' vincolata

quindi applicando il teorema dell'impulso si puo' ottenere immediatamente

la velocita' iniziale del centro di massa nell'istante immediatamente successivo

all'azione dell'impulso per il teorema dell'impulso $\vec{J} = \Delta\vec{q}$

e sfruttando le proprieta' del centro di massa $\vec{\mathrm{v}}_{CM} = \dfrac{\vec{Q}}{M}$

visto che la sfera era inizialmente ferma si ha

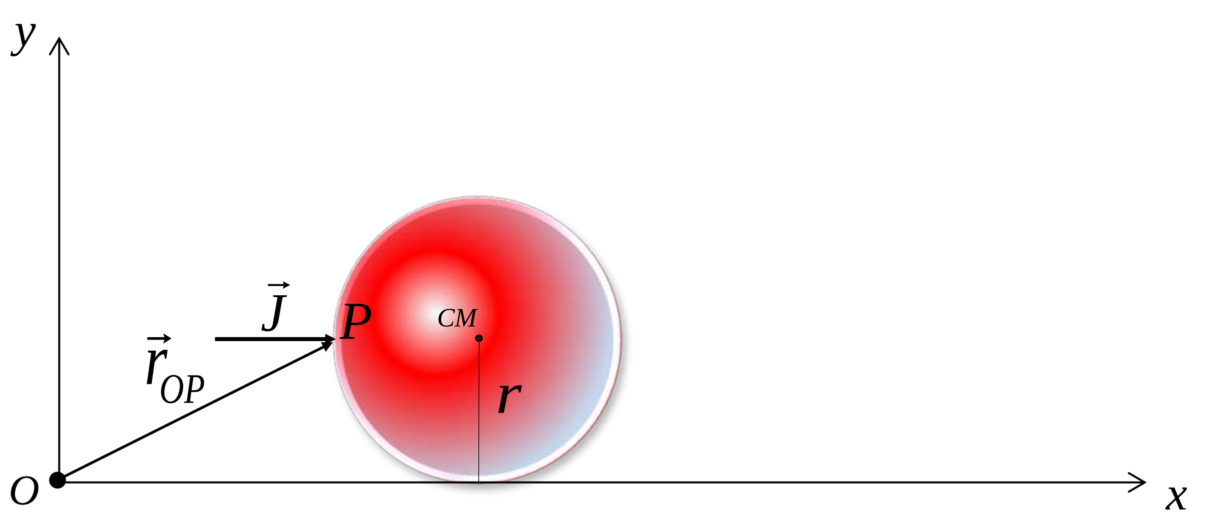
$\vec{J} = m\vec{\mathrm{v}}_{cm}(0)$ da cui in modulo $\mathrm{v}_{cm}(0) = \dfrac{J}{m}$

dove J e $v_{cm}(0)$ sono i moduli dei corrispondenti vettori

se assumiamo come polo fisso l'origine O di un sistema di coordinate

cartesiane xy solidale con il piano del biliardo si avra'

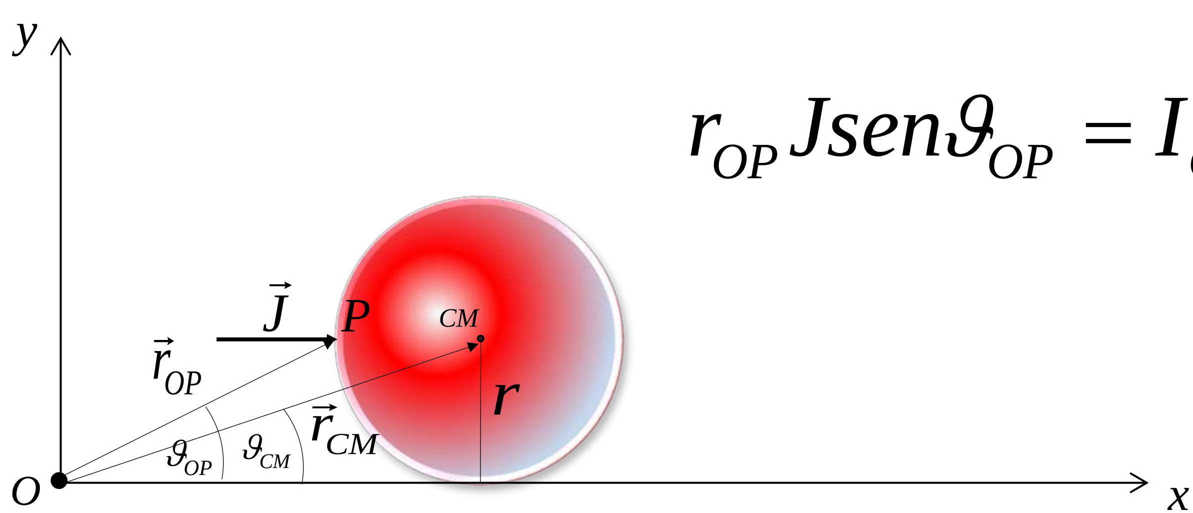
$$\vec{L}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{J}$$



per il teorema di Koning del momento angolare $\vec{L}_O = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM}$

dato che $m\vec{v}_{cm}(0) = \vec{J}$ $\Rightarrow$ $\vec{L}_O(t=0) = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times \vec{J}$ in modulo

$\left|\vec{L}_O\right| = r_{OP} J sen\vartheta_{OP}$ e $\left|\vec{r}_{CM} \times \vec{J}\right| = r_{CM} J sen\vartheta_{CM}$ quindi



$$r_{OP} J sen\vartheta_{OP} = I_C\omega + r_{CM} J sen\vartheta_{CM}$$

ma $r_{OP} sen\vartheta_{OP} = r_{CM} sen\vartheta_{CM} = r$ per cui $rJ = I_C\omega + rJ$

$\Rightarrow$ $I_C\omega = 0$ ossia $\omega = 0$ quindi la sfera inizialmente inizia a strisciare con velocita' $\mathrm{v}_{cm} = \dfrac{J}{m}$ <u>senza rotolare</u>

successivamente per effetto del momento della forza di attrito volvente

comincera' a rotolare oltre che a strisciare

la forza di attrito dinamico ha modulo $\mu_d mg$ e si oppone al moto

quindi $$ma_{CM} = -\mu_d mg \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = -\mu_d g$$

$$\mathrm{v}_{CM}(t) = \mathrm{v}_{CM}(0) - \mu_d gt \quad = \frac{J}{m} - \mu_d gt$$

per avere informazioni sul moto di rotazione conviene riferirsi al sistema del

centro di massa

assumendo come polo il centro di massa e applicando la seconda

equazione cardinale

$$\mu_d mgr = I_{CM}\alpha = \frac{2}{5}mr^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{r}$$

da cui $$\omega(t) = \alpha t = \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{r}t$$

ricapitolando

$$\omega(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{v}_{cm}(0) = \frac{J}{m}$$

$$\omega(t) = \frac{5}{2}\mu_d \frac{g}{r} t \qquad \text{e} \qquad \mathrm{v}_{CM}(t) = \frac{J}{m} - \mu_d g t$$

e' chiaro che al tempo $t = 0$ $\mathrm{v}_{CM} > \omega r$ quindi la sfera proseguira' in un

moto di rotolamento e strisiciamento finche' e' valida questa disuguaglianza', ma

la velocita' angolare aumenta nel tempo mentre la velocita' del centro di massa

diminuisce nel tempo e ad un certo istante t' si arrivera' all'uguaglianza

delle velocita'

quindi $\mathrm{v}_{CM} t' = \omega r$ ossia $\dfrac{J}{m} - \mu_d g t' = \dfrac{5}{2} \mu_d \dfrac{g}{r} t' r$

da cui $t' = \dfrac{2}{7} \dfrac{J}{\mu_d m g}$

da quel momento in poi il moto della sfera tendera' a diventare un moto di puro rotolamento uniforme (in assenza di attrito volvente)

Backup Slides