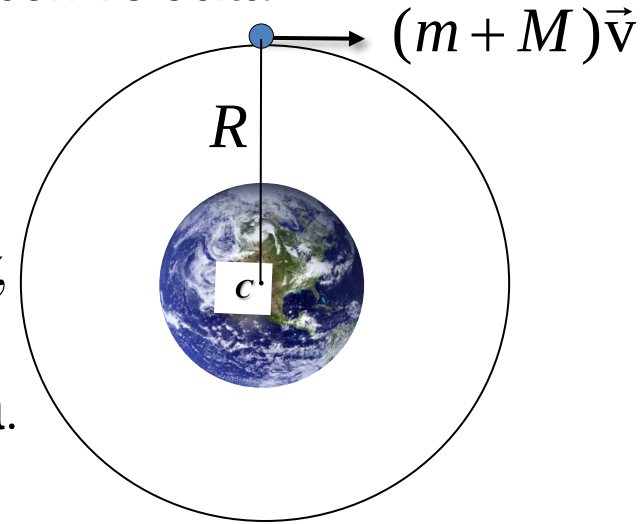
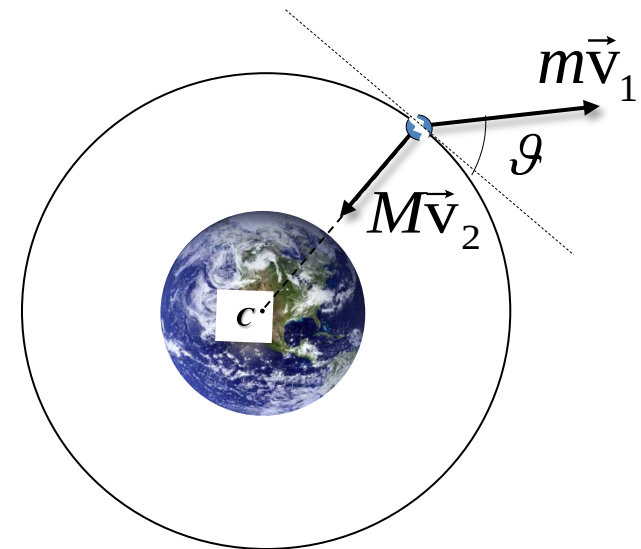


Un satellite di massa $(m + M)$, da considerarsi puntiforme, percorre un'orbita circolare di raggio R attorno al centro C della terra con velocità $\vec{v}$.

Determinare l'espressione del modulo v della velocità del satellite in funzione della costante gravitazionale γ , della massa M_T della terra e del raggio R dell'orbita.



Ad un certo istante, a seguito di un'esplosione interna, la parte di massa m del satellite viene lanciata verso l'esterno dell'orbita con velocità di modulo v_1 che forma un angolo di 45° con la tangente all'orbita originaria del satellite, mentre la parte del satellite di massa M a causa dell'esplosione atterra verticalmente al suolo.



Determinare l'espressione del modulo delle velocità v_1 e v_2 in funzione di γ , M_T , R , m ed M .

Determinare la distanza minima R_{min} dal centro C della terra raggiunta dalla massa m dopo l'esplosione nel caso $m = M$, sapendo che in tale posizione la velocità della massa m ha direzione perpendicolare al suo vettore posizionale rispetto a C .

➤ per iniziare dovremo trovare la risultante delle forze esterne agenti sul sistema assumendo che il sistema sia composto solamente dal satellite e dalla terra se ignoriamo gli effetti della presenza del sole, della luna, degli altri pianeti, etc.

riesce che sul sistema agiscono solo forze interne → il sistema e' isolato

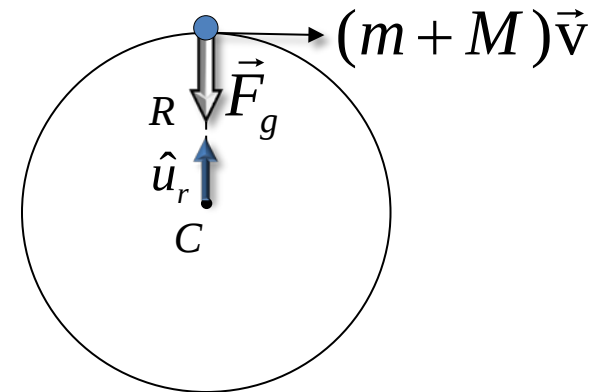
per determinare l'accelerazione del satellite dovremo poi applicare la seconda

legge della dinamica alla massa del satellite $\vec{F} = m_s \vec{a}$ considerato che

in questo caso l'unica forza che agisce sul satellite e' l'attrazione gravitazionale

terrestre $\vec{F}_g = -\gamma \frac{m_s M_T}{R^2} \hat{u}_r$ quindi

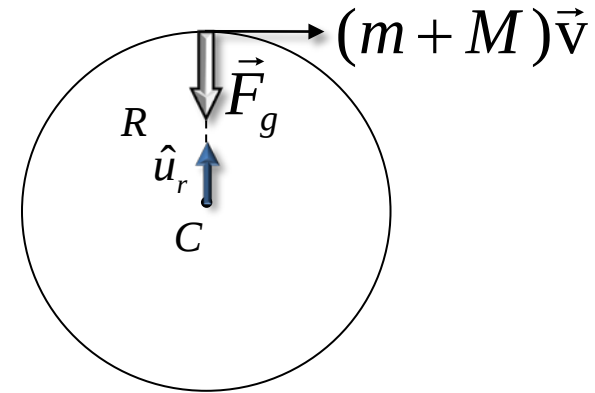
$$m_s \vec{a} = -\gamma \frac{m_s M_T}{R^2} \hat{u}_r \quad \text{da cui} \quad \vec{a} = -\gamma \frac{M_T}{R^2} \hat{u}_r$$



dalle leggi di Keplero e di Newton sappiamo che la forza gravitazionale e' centrale
 dunque sara' la forza gravitazionale a fornire l' accelerazione centripeta

necessaria per mantenere il satellite in orbita

in generale $\vec{F} = m_s \vec{a} = m_s \vec{a}_t + m_s \vec{a}_c$



la forza e' puramente centrale $\rightarrow \vec{F} \parallel R\hat{u}_r$ e in questo caso il moto e'

circolare $\rightarrow R\hat{u}_r \perp \vec{v}$ ossia $R\hat{u}_r \perp v\hat{t}$ se ne conclude che

$m_s \vec{a}_t = 0 \Rightarrow \vec{F} = m_s \vec{a}_c$ dalla cinematica sappiamo che

$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{R} \hat{u}_r$ dove $v = |\vec{v}|$

quindi da $\vec{a} = -\gamma \frac{M_T}{R^2} \hat{u}_r$ otteniamo $-\frac{v^2}{R} \hat{u}_r = -\gamma \frac{M_T}{R^2} \hat{u}_r$

ossia $v = \sqrt{\gamma \frac{M_T}{R}}$

Per rispondere alla richiesta di determinare l'espressione del modulo delle velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in funzione di γ , M_T , R , m ed M

visto che il sistema e' isolato potremo avvalerci della legge di conservazione

della quantita' di moto totale in effetti dalla prima equazione cardinale $\vec{R}^e = \frac{d\vec{Q}_T}{dt}$

se $\vec{R}^e = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{Q}_T}{dt} = 0$ quindi $\vec{Q}_T = \text{costante}$

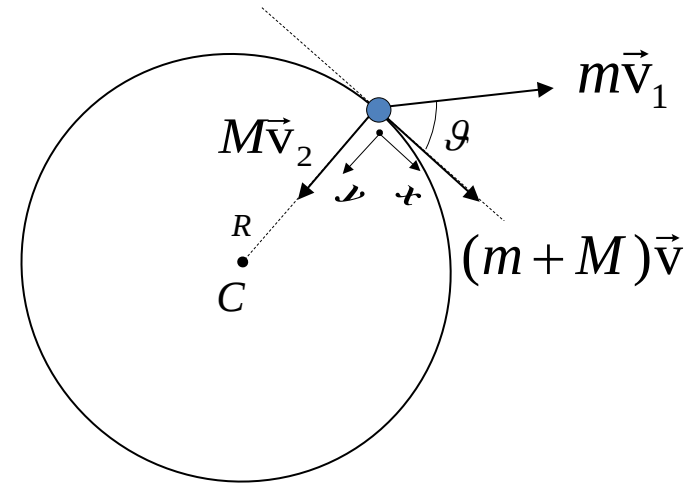
prima dell'esplosione $\vec{Q}_T = (m + M)\vec{v}$

dopo l'esplosione $\vec{Q}_T' = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2$

e per la conservazione della quantita' di moto totale si ha

$$(m + M)\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2$$

dalle informazioni fornite nel testo dobbiamo dedurre che il tutto avviene nel piano dell'orbita quindi il problema è bidimensionale scegliamo di descrivere il moto rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xy orientati come in figura una volta determinato il sistema di riferimento proiettiamo la quantità di moto totale lungo



i due assi cartesiani xy l'angolo θ è noto ed è di 45° per cui

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{posto} \quad v_1 = |\vec{v}_1| \quad \text{e} \quad v_2 = |\vec{v}_2| \quad \text{si ha}$$

lungo la x $(m + M)v = mv_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{(m + M)}{m} v = \sqrt{2} \frac{(m + M)}{m} v$

lungo la y $0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} mv_1 + Mv_2 \Rightarrow Mv_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} mv_1 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{M} v_1$

sostituendo in v_2 il valore di v_1 trovato in precedenza

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{M} \left(\sqrt{2} \frac{(m + M)}{m} v \right) = \frac{(m + M)}{M} v$$

in conclusione $v_1 = \sqrt{2} \frac{(m + M)}{m} v$ e $v_2 = \frac{(m + M)}{M} v$

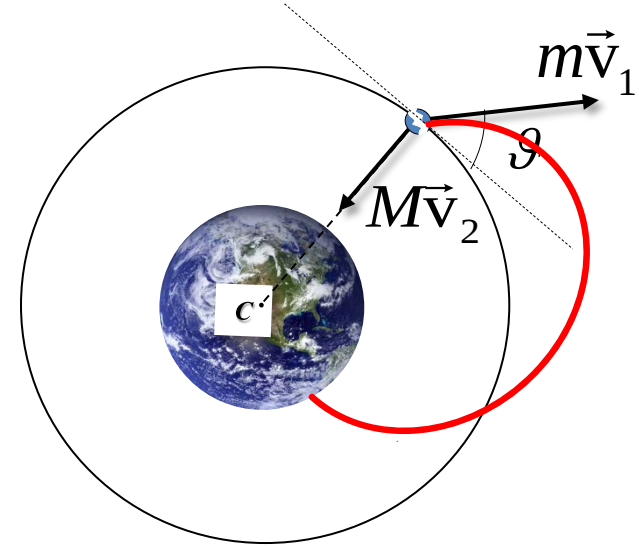
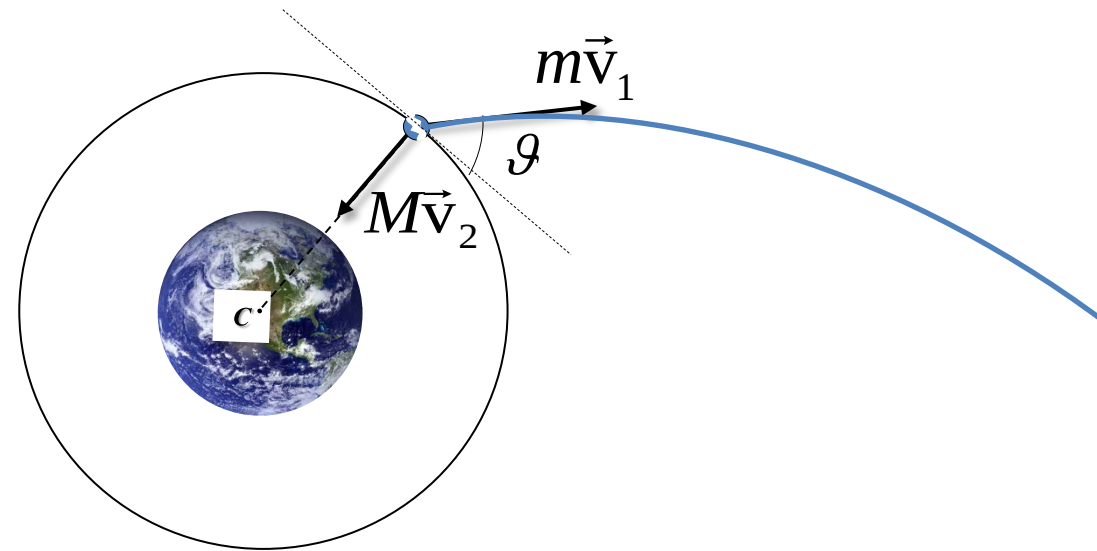
vi sono tre possibili scenari a seconda del modulo v_1 della velocità $\vec{v}_1$

➤ $v_1 \geq v_{\text{fuga}}$ quindi

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow R_{\min} = R$$

➤ cade sulla Terra

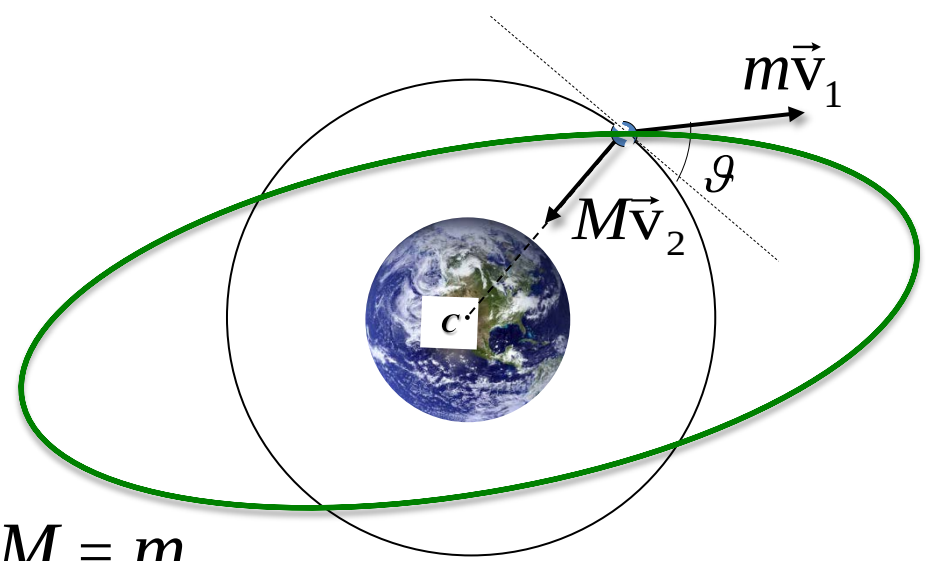
$$\Rightarrow R_{\min} = R_T$$



➤ orbita chiusa

e' chiaro che ci troviamo in questa

situazione $\Rightarrow R_{min} = ?$



dal testo dell'esercizio sappiamo che $M = m$

e dato che
$$v_1 = \sqrt{2} \frac{(m + M)}{m} v$$

si ha $v_1 = 2\sqrt{2} v$ ma $v = \sqrt{\gamma \frac{M_T}{R}}$ per cui

$$v_1 = 2\sqrt{2\gamma \frac{M_T}{R}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{8\gamma \frac{M_T}{R}}$$
 se indichiamo

con v_1' il modulo della velocita' posseduta dal frammento del satellite

nel momento in cui raggiunge il raggio minimo R_{min} sappiamo che

in tale posizione la velocità della massa m ha direzione perpendicolare al suo

vettore posizionale rispetto a C ossia sappiamo che $\vec{R}_{min} \cdot \vec{v}'_1 = 0$

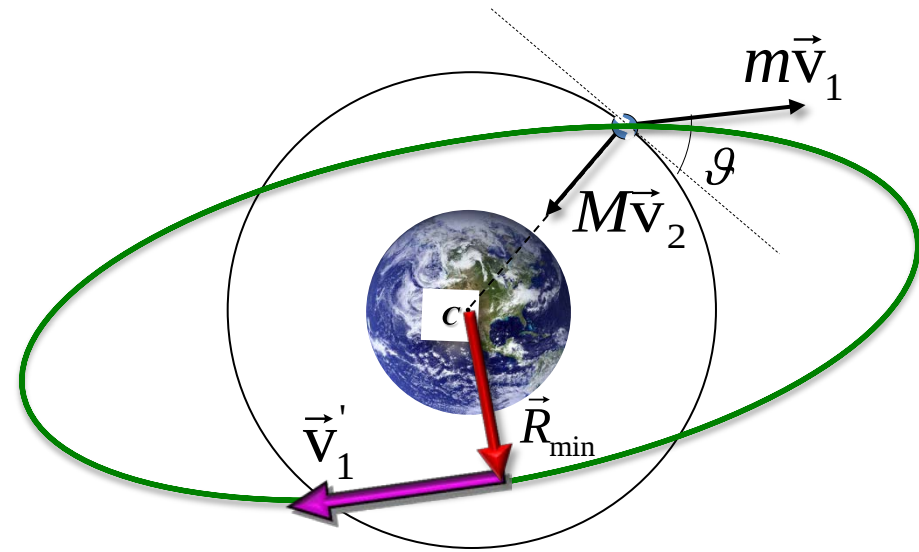
si tratta di un problema a due incognite

$$v'_1 = |\vec{v}'_1| \quad \text{e} \quad R_{min} = |\vec{R}_{min}|$$

quindi avremo bisogno di due relazioni indipendenti

la forza gravitazionale è conservativa quindi ignorando gli attriti potremo imporre

la conservazione dell' *energia meccanica totale*



assumendo C come polo fisso dato che $\vec{F}_g$ e' sempre antiparallela a $\vec{R}$

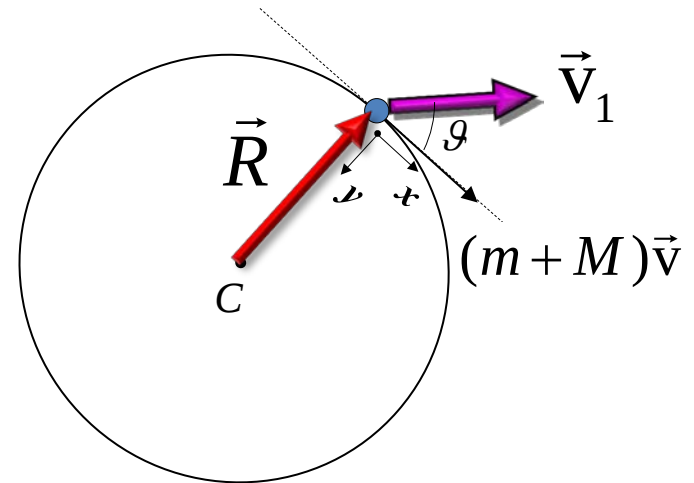
$$\Rightarrow \vec{M}_g = \vec{R} \times \vec{F}_g = 0$$

quindi per la seconda equazione cardinale $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

e da cio' ne consegue che $\vec{L} = costante$

al momento dell'esplosione $\vec{L} = \vec{R} \times m\vec{v}_1$

$$|\vec{L}| = Rmv_1 \sin 45^\circ$$



nel momento in cui la massa m raggiunge il raggio minimo $\vec{L} = \vec{R}_{\min} \times m\vec{v}'_1$

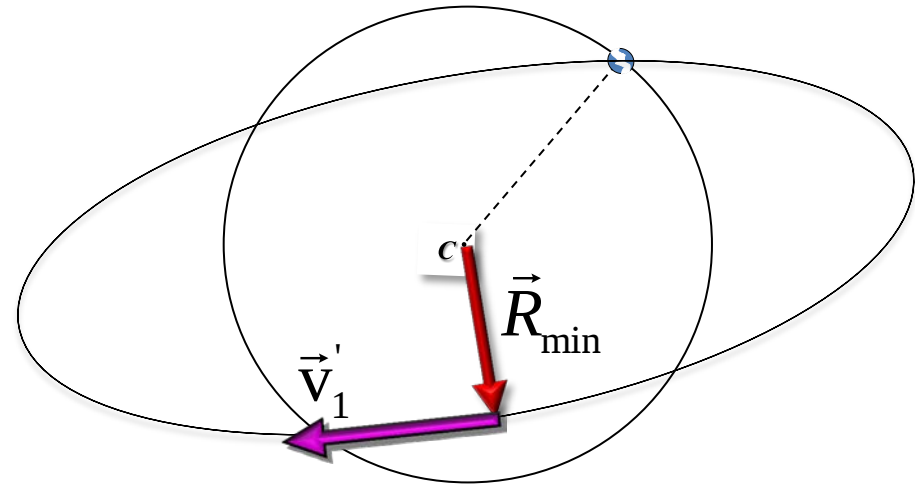
$$\Rightarrow |\vec{L}| = mv'_1 R_{\min} \sin 90^\circ$$

uguagliando

$$mv_1 R \sin 45^\circ = mv'_1 R_{\min} \sin 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} mv_1 R = mv'_1 R_{\min} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} v_1 R = v'_1 R_{\min}$$

$$\Rightarrow v'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{R_{\min}} v_1$$



per la conservazione dell' *energia meccanica*

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma \frac{mM_T}{R} = \frac{1}{2}mv_1'^2 - \gamma \frac{mM_T}{R_{min}} \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_1'^2 = \gamma \frac{mM_T}{R} - \gamma \frac{mM_T}{R_{min}} \Rightarrow \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_1'^2) = \gamma mM_T \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{min}} \right)$$

ossia
$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_1'^2) = \gamma M_T \left(\frac{R_{min} - R}{RR_{min}} \right)$$

ricordando che si aveva
$$v_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{R_{min}} v_1 \Rightarrow v_1'^2 = \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_{min}^2} v_1^2$$

il termine
$$\frac{1}{2}(v_1^2 - v_1'^2)$$
 diviene

$$\frac{1}{2} \left(v_1^2 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_{min}^2} v_1^2 \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{R_{min}^2} \right) v_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2R_{min}^2 - R^2}{2R_{min}^2} \right) v_1^2 = \frac{2R_{min}^2 - R^2}{4R_{min}^2} v_1^2$$

quindi $\frac{2R_{min}^2 - R^2}{4R_{min}^2} v_1^2 = \gamma M_T \frac{R_{min} - R}{R R_{min}}$

semplificando R_{min} al denominatore

$$\frac{2R_{min}^2 - R^2}{4R_{min}} v_1^2 = \gamma M_T \frac{R_{min} - R}{R} \quad \text{ossia}$$

$$(2R_{min}^2 - R^2) R v_1^2 = 4\gamma M_T R_{min} (R_{min} - R)$$

dato che risultava $v_1 = \sqrt{8\gamma \frac{M_T}{R}} \Rightarrow v_1^2 = 8\gamma \frac{M_T}{R}$

$$(2R_{min}^2 - R^2)8\gamma \frac{M_T}{R} R = 4\gamma M_T R_{min} (R_{min} - R) \quad \text{semplificando } R$$

$$2(2R_{min}^2 - R^2) = R_{min} (R_{min} - R) \quad \text{ossia} \quad 4R_{min}^2 - 2R^2 = R_{min}^2 - RR_{min}$$

$$4R_{min}^2 - 2R^2 - R_{min}^2 + RR_{min} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3R_{min}^2 + RR_{min} - 2R^2 = 0$$

$$R_{min} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 24R^2}}{6} = \frac{-R \pm 5R}{6}$$

$$R_{min} = -R \quad \text{oppure} \quad R_{min} = \frac{2}{3}R \quad \text{ovviamente la soluzione accettabile}$$

$$\text{dal punto di vista fisico e' } R_{min} = \frac{2}{3}R$$

Backup Slides