

Un sottile disco di massa $m = 3 \text{ Kg}$ e raggio $r = 25 \text{ cm}$ e' inizialmente fermo e viene messo in rotazione con una fune la cui tensione e' di modulo 10 N .

Quale sara' la sua velocita' angolare dopo 5 secondi ?

e' chiaro che l'asse di rotazione del disco rimane costante in direzione e verso rispetto ad un sistema di riferimento inerziale fisso, ma $\vec{\omega}$ non rimane costante in modulo
assumeremo che il sistema di riferimento S in moto abbia

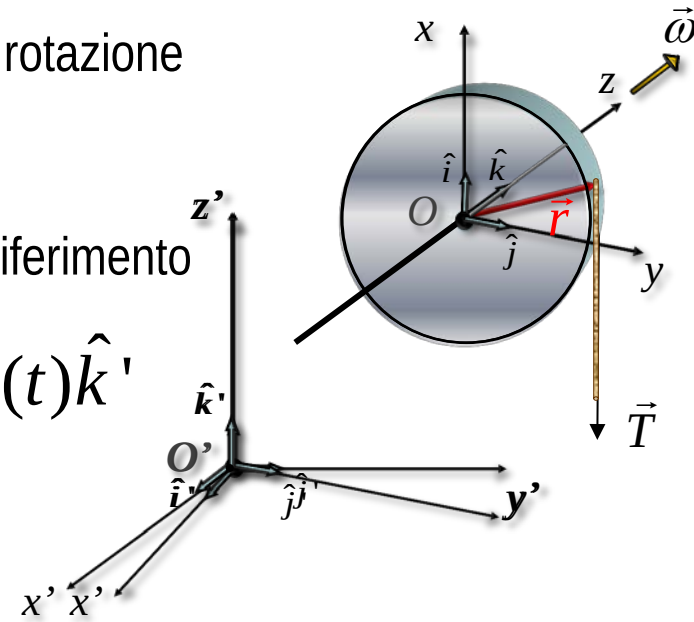
l'origine O nel centro del disco e che la direzione dell'asse di rotazione sia lungo asse $z \rightarrow \vec{\omega} = -\omega(t)\hat{k}$

senza perdere di generalita' possiamo orientare il sistema di riferimento

fisso S' di modo che $\hat{k}' \equiv \hat{k} \Rightarrow \vec{\omega} = -\omega(t)\hat{k} \equiv -\omega(t)\hat{k}'$

il momento d'inerzia di un disco omogeneo rispetto ad

un asse passante per il centro del disco e' $I = \frac{1}{2}mr^2$



nel caso piu' semplice possibile
 in cui il momento angolare totale
 sia parallelo alla velocita' angolare

se $\vec{\omega} = \omega \hat{k} \rightarrow \vec{L}_{O_P} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + I_z \omega \hat{k}$
 $\Rightarrow |\vec{L}_{O_P}| = L_{O_{P_z}} = I_z \omega$

in questo caso

e' evidente che il momento angolare totale

$\vec{L}_{O_P}$ e' parallelo ad $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z \vec{\omega})}{dt} = \frac{dI_z}{dt} \vec{\omega} + I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_z \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \vec{\alpha}$$

se poi il momento d'inerzia fosse
costante nel tempo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

e dalla seconda equazione cardinale

$$\vec{M}^E = I_z \vec{\alpha}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{M}^E}{I}$$

$$I = \frac{1}{2} m r^2 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{3}{2} (0.25)^2 = 9.4 \cdot 10^{-2} \text{ kg } m^2$$

ammesso che la fune non scivoli il momento della forza applicata rispetto al C.M. e'

$$|\vec{M}| = r |\vec{T}| \quad \Rightarrow \quad |\vec{M}| = 0.25 \cdot 10 = 2.5 \text{ N } m \quad \text{dalla} \quad |\vec{M}| = I |\vec{\alpha}|$$

si ricava :
$$|\vec{\alpha}| = \frac{M}{I} = 26.7 \text{ rad } s^{-2}$$

l'accelerazione angolare α è costante quindi si tratta di un moto circolare

uniformemente accelerato le equazioni orarie per la velocità angolare sono simili

a quelle del moto rettilineo uniformemente accelerato

a patto di sostituire alla accelerazione a e alla velocità v la accelerazione

e la velocità angolari al posto della $v(t) = at + v_0$ bisognerà usare la

$\omega(t) = \alpha t + \omega_0$ in questo caso $\omega_0 = 0$ visto che il disco parte

da fermo perciò $\omega(t) = \alpha t = 26.7 \cdot 5 = 133 \text{ rad s}^{-1}$

Backup Slides