Soluzioni LA(1)

a) $x_{\text{CM}} = \dfrac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} h \cos\vartheta$; $y_{\text{CM}} = \dfrac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} h \sin\vartheta$

$\rightarrow |G - O| = \dfrac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} h = \dfrac{5}{13} h = 0.12 \text{ m}$

b) $x_{\text{CM}} = \dfrac{5}{13} h \cos\vartheta(t)$; $y_{\text{CM}} = \dfrac{5}{13} h \,\text{sen}\, \vartheta(t)$

$\rightarrow x_{\text{CM}}^2 + y_{\text{CM}}^2 = \dfrac{25}{169} h^2$

c) $(P_0 - O) \wedge m\vec{v}_0 = I_0^{m_0+m_2} \vec{\omega}$

$\rightarrow \vec{\omega} = -\dfrac{m_0 v_0 h \,\text{sen}\, \vartheta}{(m_0 + m_2) h^2} \vec{k}$; $|\,\vec{\omega}\,| = 2/3 \,\text{rad/s}$

d) $\vec{a}_{\text{CM}} = \ddot{x}_{\text{CM}} \vec{i} + \ddot{y}_{\text{CM}} \vec{j} = -\dfrac{5}{13} h\, \dot{\vartheta}^2 (\cos\vartheta\, \vec{i} + \text{sen}\, \vartheta\, \vec{j})$; $|\vec{a}_{\text{CM}}| = 0.051 \text{ m/s}^2$

4) $L_{AB} = -\frac{3}{4} k \times \text{m}^{-2} = -0.75 \text{ J}$, calcolato ad esempio lungo i tratti consecutivi (1,0,1)m → (0,1,1)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,1)m, $L = 0$], (0,1,1)m → (0,1,3)m [rettilineo, $L = 0$] e (0,1,3)m → (0,2,3)m [rettilineo, $L = \int_{1\text{m}}^{2\text{m}} \frac{-2ky}{y^4} dy$].

Percorsi a "zigzag": evitare quelli che passano per la singolarità $x = y = 0$; va bene ad esempio il percorso a tratti tutti rettilinei (1,0,1)m → (1,1,1)m → (0,1,1)m → (0,1,3)m.

Soluzioni LA(2)

a) $\vec{K}_F = \vec{K}_I$

$\vec{K}_I = (A-O)\wedge m_0\vec{v} = -(l-d)\,\vec{j}\wedge m_0(v\cos\alpha\,\vec{j} + v\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{i}) = (l-d)m_0 v\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{k}$

$\vec{K}_F = I_0\vec{\omega}\,,\qquad I_0 = 3m(l-d)^2 + md^2$

$$\rightarrow\ (l-d)m_0 v\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{k} = I_0\vec{\omega} \quad\rightarrow\quad \vec{\omega} = \frac{(l-d)2mv\,\mathrm{sen}\,\alpha}{3m(l-d)^2 + md^2}\,\vec{k}\,,$$

$|\,\vec{\omega}\,| = 5.4$ rad/s

b) $$y_G(t_{\mathrm{urto}}) = \frac{m\,y_B + (m+m_0)y_A}{m+m+m_0} = \frac{md - 3m(l-d)}{4m} = d - {}^{3}\!/_{4}\,l = -\,0.25\ \mathrm{m};$$

$d(G,O) = 0.25$ m

c) Non si conservano né $\vec{Q}$ né $\vec{K}$, mentre si conserva E (la reazione vincolare ideale non compie lavoro, la forza peso è conservativa).

d) Conservazione dell'energia tra l'istante subito dopo l'urto e quello in cui $y_G = y_G^{\max}$ (la sbarra si ferma): $\frac{1}{2}I_0\omega^2 = m_{\mathrm{tot}}\,g\left[y_G^{\max} - y_G^{\mathrm{urto}}\right]$

$$\rightarrow\ y_G^{\max} = d - {}^{3}\!/_{4}\,l + \frac{\frac{1}{2}\left[3m(l-d)^2 + md^2\right]\omega^2}{4mg} = -\,0.054\ \mathrm{m}.$$

4) $L_{AB} = \frac{2}{15}k\times\mathrm{m}^{-1} = 0.13\ \mathrm{J}$, calcolato ad esempio lungo i tratti (0,3,4)m → (3,0,4)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,4)m, $L = 0$], (3,0,4)m → (3,0,2)m [rettilineo, $L = 0$] e (3,0,2)m → (5,0,2)m [rettilineo, $L = \int_{3\mathrm{m}}^{5\mathrm{m}} \frac{kx}{x^3}dx$].

Soluzioni LA(3)

a) $\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\vec{P}_{\mathrm{tot}}}{\mathrm{m}_{\mathrm{tot}}}$ costante prima e dopo l'urto (forze tutte interne)

$\rightarrow \vec{v}_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_0\vec{v}_0}{m+m+m_0} = \dfrac{2m\vec{v}_0}{4m} = \dfrac{\vec{v}_0}{2} = 1.5\,\mathrm{m/s}\ \vec{i}$

b) Traiettoria rettilinea parallela all'asse x:

$y_{\mathrm{CM}} = \mathrm{cost} = \dfrac{m(l-a)-ma}{m+m+m_0} = \dfrac{-2a+l}{4} = \dfrac{l}{6} = a = 0.1\ \mathrm{m}$

c) $I_0 = m(l-a)^2 + ma^2$,

$I_{\mathrm{CM}} = I_0 - 4ma^2 = m(l-a)^2 - 3ma^2 = 0.11\ \mathrm{Kg\ m^2}$

d) $\vec{K}_{\mathrm{tot}}$ è costante; rispetto al centro di riduzione G,

$(P_0 - G)\wedge m_0\vec{v}_0 = I_{\mathrm{CM}}\omega\ \vec{k}$

$m_0 v_0 a = I_{\mathrm{CM}}\omega \rightarrow \vec{\omega} = \dfrac{m_0 v_0 a}{I_{\mathrm{CM}}}\vec{k} = 2.7\,\mathrm{rad/s}\ \vec{k}$

4) $L_{AB} = k\ln\frac{4}{3} = 1.33\ \mathrm{J}$, calcolato ad esempio lungo i tratti (3,0,0)m $\rightarrow$ (0,-3,0)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,0), $L = 0$], (0,-3,0)m $\rightarrow$ (0,-3,5)m [rettilineo, $L = 0$] e (0,-3,5)m $\rightarrow$ (0,-4,5)m [rettilineo, $L = \int_{-3\mathrm{m}}^{-4\mathrm{m}} \dfrac{k}{y}dy = k\ln|y|_{-3}^{-4} = k\ln\frac{4}{3}$].

Soluzioni LA(4)

a) $I_0 = md^2 + m(l-d)^2 = 0.065$ Kg m^2

b) $\begin{cases} (P-O)\wedge m_0\vec{v} = (P'-O)\wedge m_0\vec{v}' + I_0\vec{\omega} \\ \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v'^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \end{cases}$ $\qquad v = |\vec{v}| \quad v' = |\vec{v}'|$

$\begin{cases} -d\,\vec{j}\wedge m_0 v\,\vec{i} = -d\,\vec{j}\wedge(-m_0v'\,\vec{i}) + I_0\omega\,\vec{k} \\ m_0(v^2 - v'^2) = I_0\omega^2 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} m_0 d(v+v') = I_0\omega \\ m_0(v+v')(v-v') = I_0\omega^2 \end{cases}$

$\rightarrow \quad v' = v\dfrac{I_0 - m_0d^2}{I_0 + m_0d^2} = 0.48$ m/s $\vec{i}$; $\vec{v}' = -\,0.48$ m/s $\vec{i}$

c) $\rightarrow \quad \omega = \dfrac{v - v'}{d} = 7.6$ rad/s; $\vec{\omega} = 7.6$ rad/s $\vec{k}$

d) $I_0 - m_0d^2 = md^2 + m(l-d)^2 - 2md^2 \xrightarrow{d=l/2} 0$
$\rightarrow \quad v' = 0$

4) $L_{AB} = k \times \mathrm{m}^{1/2} = 1$ J, calcolato ad esempio lungo i tratti (-4,0,7)m → (0,4,7)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,7)m, L = 0], (0,4,7)m → (0,4,11)m [rettilineo, L = 0] e (0,4,11)m → (0,9,11)m [rettilineo, $L = \int_{4\mathrm{m}}^{9\mathrm{m}} \frac{k}{2y^{1/2}}\,dy = k\sqrt{y}\Big|_{4\mathrm{m}}^{9\mathrm{m}} = (3-2)k\times\mathrm{m}^{1/2}$].