Soluzioni LA-1

a) $$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{v^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv^2$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,v_0\,\vec{i}$$

b) $$\vec{K} = I_{CM}\vec{\omega} = -\frac{1}{2}MR^2\,\frac{v}{R}\,\vec{k} = -\frac{1}{2}MR\sqrt{\frac{2}{3}}\,v_0\,\vec{k}$$

c) Il passaggio dalla regione liscia a quella scabra e la variazione di velocità del cilindro da v_0 a v devono avvenire istantaneamente senza che il cilindro strisci. In tal modo, l'unica forza agente (oltre a peso e reazione normale del piano) è la reazione vincolare orizzontale esercitata dal *bordo* che delimita il piano scabro: il momento di questa forza dà inizio al moto di rotazione del cilindro. La reazione orizzontale, agendo istantaneamente, è un vincolo ideale e non compie lavoro; durante il successivo moto di rotolamento puro essa è addirittura assente: non è necessaria l'azione di una forza di reazione per mantenere costante il momento angolare già acquisito dal cilindro. Poiché nessuna forza di tipo dissipativo agisce sul cilindro, l'energia meccanica rimane costante anche in seguito.

4) $V(x,y,z) = -(Ax^3z + By^2z + Cxz^5)$

Soluzioni LA-2

a) $(C-A)\wedge\vec{F}=I_A\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \quad\Rightarrow\quad r\vec{j}\wedge F\vec{i}=-\left(\dfrac{1}{2}Mr^2+Mr^2\right)\dfrac{d\omega}{dt}\vec{k}$

$$\Rightarrow\quad -rF\vec{k}=-\frac{3}{2}Mr^2\frac{a_C}{r}\vec{k} \quad\Rightarrow\quad a_C=\frac{2F}{3M}$$

b) $\vec{R}_T+\vec{F}=M\vec{a}_C \quad\Rightarrow\quad -R_T\vec{i}+F\vec{i}=Ma_C\vec{i} \quad\Rightarrow\quad -R_T+F=\dfrac{2F}{3}$

$$\Rightarrow\quad R_T=F-\frac{2F}{3}=\frac{F}{3}$$

c) $\vec{v}_A=\vec{v}_C+\vec{\omega}\wedge(A-C)=\dfrac{2F}{3M}t\,\vec{i}+\left(-\dfrac{2F}{3Mr}t\right)\vec{k}\wedge(-r)\,\vec{j}=\dfrac{2F}{3M}t\,\vec{i}-\dfrac{2F}{3M}t\,\vec{i}=\vec{0}$

4) $V(x,y,z)=-(Ax^2y+Bxy^2z+Cxz^4)$

Soluzioni LA-3

a) $J\,\vec{i} = Mv_{CM}\vec{i}$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \frac{J}{M}\vec{i}\,, \quad \vec{v}_A = 2\frac{J}{M}\,\vec{i}\,, \quad \vec{v}_B = \vec{0}$$

b) $W = \dfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \dfrac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = \dfrac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}MR^2\right)\dfrac{v_{CM}^2}{R^2} = \dfrac{3}{4}Mv_{CM}^2 = \dfrac{3}{4}\dfrac{J^2}{M}$

c) $\vec{\omega} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{J}{MR}\,\vec{k}$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{J}{M}\vec{i}\,,$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\wedge(A - CM) = \frac{J}{M}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\frac{J}{MR}\vec{k}\wedge R\,\vec{j} = \left(\frac{J}{M} + \frac{1}{2}\frac{J}{M}\right)\vec{i} = \frac{3}{2}\frac{J}{M}\vec{i}\,,$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\wedge(B - CM) = \frac{J}{M}\,\vec{i} - \frac{1}{2}\frac{J}{MR}\vec{k}\wedge(-R)\,\vec{j} = \left(\frac{J}{M} - \frac{1}{2}\frac{J}{M}\right)\vec{i} = \frac{1}{2}\frac{J}{M}\vec{i}$$

4) $V(x,y,z) = -(Ax^4y + By^3z + Cxz^2)$

Soluzioni LA-4

a) $W_{\text{TOT}} \equiv FL\cos\alpha = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \; = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{v_{CM}^2}{R^2} = \frac{3}{4}Mv_{CM}^2$

$\Rightarrow \quad F = \frac{3Mv_{CM}^2}{4L\cos\alpha}$

b) $Ma_{CM} = \frac{3Mv_{CM}^2}{4L\cos\alpha}\cos\alpha - R_T \quad \Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{3v_{CM}^2}{4L} - \frac{R_T}{M}$

c) $L = \frac{1}{2}a_{CM}t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a_{CM}}}$

4) $V(x,y,z) = -(A\ z^2y^3 + B\ x^2z^3 + C\ x^2y^3)$