

Quesiti

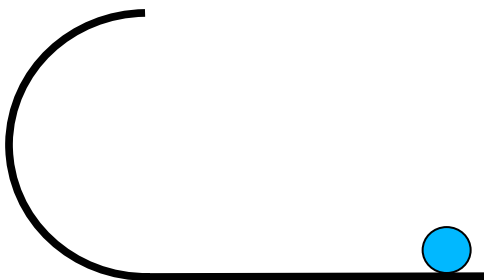
- 1) Enunciare ed esemplificare il significato del teorema di Huygens-Steiner.
- 2) Enunciare e commentare il teorema di conservazione dell'energia meccanica.
- 3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = (\alpha z - \beta)\vec{j} + (\alpha y + 5\beta)\vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale. Trovare il lavoro fatto dal campo di forze su una traiettoria rettilinea che congiunge il punto A(L,-L,0) con il punto B(L,L,0).

Problema

Un disco omogeneo di massa m , raggio r e spessore trascurabile rotola senza strisciare con velocità angolare avente modulo ω_0 lungo una guida priva di attrito composta da un tratto rettilineo e da un tratto semicircolare di raggio $R=10r$ come in figura.

Calcolare le espressioni delle seguenti grandezze fisiche:

- 1) l'intervallo dei valori di ω_0 per i quali il disco si stacca dalla guida prima di averne raggiunto il punto più alto, e senza rotolare all'indietro;
- 2) la quota alla quale avviene il distacco;
- 3) la velocità del disco nel momento in cui tocca terra.



Soluzioni

Quesiti

$$3) \quad U(x, y, z) = -\beta y + (\alpha y + \beta 5)z + \cos t.$$

$$V = -U = \beta y - (\alpha y + 5\beta)z + \cos t$$

$$L = V(A) - V(B) = -\beta L - \beta = -2\beta L$$

Problema

1) Man mano che il disco sale la sua energia cinetica si trasforma in potenziale. Affinché si stacchi dalla guida prima di uscirne (ma senza scivolare all'indietro) occorre che il suo centro arrivi ad una quota compresa tra R e $(2R-r)$ o, in altre parole, che la sua energia sia compresa tra un valore $E_{\min} = mg(R-r) = 9mgr$ ed un valore $E_{\max} = 2mg(R-r) = 18mgr$.

Poiché $E_i = \frac{1}{2}m(\omega_0 r)^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2$, dove I è il momento d'inerzia del disco rispetto ad un asse passante per il suo centro:

$$I = \rho \int_0^r 2\pi r \cdot r^2 dr = \frac{m}{\pi \cdot r^2} \frac{2\pi \cdot r^4}{4} = \frac{mr^2}{2}$$

e quindi $E_i = 1/2 m \omega_0^2 r^2 + 1/2 \cdot 1/2 mr^2 \cdot \omega_0^2 = 3/4 mr^2 \omega_0^2$,

la condizione su ω_0 si ottiene imponendo $E_{\min} \leq E_i \leq E_{\max}$ e risulta $\sqrt{\frac{12g}{r}} \leq \omega_0 \leq \sqrt{\frac{24g}{r}}$

2) Uguagliando energia cinetica iniziale a energia potenziale finale trovo la quota q di cui si alza il baricentro: $mgq = 3/4 \cdot mr^2 \omega_0^2 \Rightarrow q = \frac{3r^2 \omega_0^2}{4g}$ che corrisponde ad una quota $h=q+r$

3) Quando il disco tocca di nuovo terra ha solo moto traslatorio, basta dunque uguagliare l'energia iniziale di rototraslazione con un'energia puramente traslatoria

$$3/4 \cdot mr^2 \omega_0^2 = 1/2 \cdot mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega_0 r$$