

ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

INGEGNERIA GESTIONALE E DEI PROCESSI GESTIONALI A-K,
INFORMATICA E DELL'AUTOMAZIONE, MECCANICA, DELL'AMBIENTE E DEL TERRITORIO E CHIMICA
(Proff. A. Bertin, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

18/7/2003

Un'asta omogenea di lunghezza l , spessore trascurabile e massa m è vincolata a ruotare attorno ad un asse verticale passante per un suo estremo. Un anello, avente la stessa massa m e da considerarsi come puntiforme, è infilato nell'asta, inizialmente trattenuto ad una distanza fissa ρ_0 dall'asse di rotazione mentre il sistema asta-anello ruota con una velocità angolare di modulo costante ω_0 . Ad un certo istante l'anello viene lasciato libero di scorrere (senza attrito) lungo l'asta. Determinare le espressioni delle seguenti grandezze:

- a) il modulo della velocità angolare dell'asta quando l'anello si stacca da essa;
- b) la componente radiale v_R della velocità con cui l'anello abbandona l'asta, sapendo

che il modulo di tale velocità vale $v = \frac{\omega_0}{l} \sqrt{\frac{14l^2\rho_0^2 + 5l^4 - 3\rho_0^4}{16}}$.

* * *

- 1) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = -\alpha \{ 8xz \vec{i} + 3y^2 \vec{j} + 4x^2 \vec{k} \}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, l'espressione dell'energia potenziale.
- 2) Scrivere l'espressione, funzione del tempo, dell'energia cinetica posseduta da una sbarretta di lunghezza L , spessore trascurabile, massa M e densità $\lambda = \beta x$ (dove x è la distanza da uno degli estremi e β una costante), quando essa, partendo da ferma all'istante $t = 0$, cade verticalmente sotto l'azione del campo gravitazionale terrestre (considerato costante) e contemporaneamente ruota con una velocità angolare $\vec{\omega}$ diretta ad essa perpendicolarmente.
- 3) Spiegare quali sono e come sono definite le grandezze fisiche che bisogna considerare nello studio della dinamica di un corpo rigido vincolato a ruotare attorno ad un asse fisso.
- 4) Descrivere le forze apparenti cui può essere soggetto un osservatore che si muove su una piattaforma rotante.

(1)

PROBLEMA

Richiamiamo le II^e equazioni cardinali della meccanica

$\vec{\Pi}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{r}_R \wedge \vec{P}$. Scegliendo come polo di riduzione il punto O si ha $\vec{r}_R = 0$ per cui

$$\vec{\Pi}^{(e)} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Notiamo che l'asse z e la prece passano applicando al sistema sbarra-anello dei momenti di forze normali al piano asse-sbarra. Questo significa che il momento delle forze esterne non ha proiezione lungo l'asse z ovvero che $\hat{\omega} \cdot \vec{\Pi}^{(e)} = 0$.

Abbiamo allora

$$\hat{\omega} \cdot \vec{\Pi}^{(e)} = \hat{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \hat{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{d}{dt} I\omega$$

dove si è sfruttato il fatto che $\hat{\omega}$ è il vettore di un asse fisso e quindi cambia come una costante nelle derivate temporali e $\hat{\omega} \cdot \vec{L} = I\omega$ dove I è il momento d'inerzia rispetto ~~alla~~ all'asse z e ω ~~è la~~ velocità angolare.

Dato che $\hat{\omega} \cdot \vec{\Pi}^{(e)} = 0$ si deve avere $\frac{d}{dt} I\omega = 0 \Rightarrow \boxed{I\omega = \text{cost.}}$

Abbiamo allora

$$1) \quad I_0 \omega_0 = I\omega$$

da cui

$$2) \quad \omega = \frac{I_0}{I} \omega_0$$

$$I_0 = \int_{\text{sbarra+anello}} r^2 dm = \int_{\text{sbarra}} r^2 dm + \int_{\text{anello}} r^2 dm = \int_0^l r^2 \lambda dr + \rho_0^2 m = \frac{1}{3} l^3 + \rho_0^2 m$$

$$I = \int_0^l r^2 \lambda dr + \rho^2 m = \frac{1}{3} l^3 + m l^2$$

(2)

tenendo conto che $m = \lambda l$ si ottiene

$$I_0 = \frac{1}{3} m l^2 + \rho_0^2 m$$

$$I = \frac{1}{3} m l^2 + m l^2 = \frac{4}{3} m l^2$$

sostituendo nelle 2) si ottiene

$$3) \omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{\frac{1}{3} m l^2 + \rho_0^2 m}{\frac{4}{3} m l^2} \omega_0 = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{\rho_0^2}{l^2} \right) \omega_0$$

che risponde al punto a).

Quando l'anello si stacca dalle sbarre possiede una velocità sia radiale che tangenziale. La velocità tangenziale v_T vale $v_T = \omega l$ ed inoltre

$$v^2 = v_T^2 + v_R^2$$

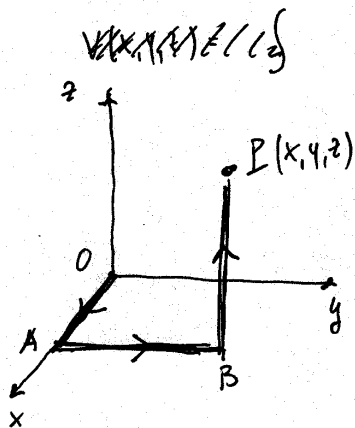
da cui

$$v_R^2 = v^2 - v_T^2 = \left[\frac{\omega_0}{l} \sqrt{\frac{14 l^2 \rho_0^2 + 5 l^4 - 3 \rho_0^4}{16}} \right]^2 - \omega^2 l^2$$

sostituendo ora le 3) si ottiene dopo qualche passaggio

$$v_R = \frac{\omega}{2l} \sqrt{4 l^2 \rho_0^2 + l^4 - 3 \rho_0^4}$$

QUESITO 1



$$\int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{l} = V_0 - V_P = -V_P$$

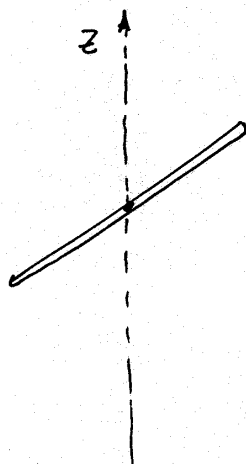
dove si è assunto $V_0 = 0$.

Scegliamo ora come cammino d'integrazione quello indicato in figura tenendo conto che lungo OA $\vec{y}=0, z=0$ e lungo AB $\vec{x}=0, z=0$.

Abbiamo allora

(3)

$$\begin{aligned}
 -V_P &= - \int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = + \int_0^P (8xz, 3y^2, 4x^2) \cdot (dx, dy, dz) \\
 &= \alpha \int_0^A (0, 0, 4x^2) \cdot (dx, 0, 0) + \\
 &\quad + \alpha \int_A^B (0, 3y^2, 4x^2) \cdot (0, dy, 0) + \\
 &\quad + \alpha \int_B^P (8xz, 3y^2, 4x^2) \cdot (0, 0, dz) = \\
 &= ~~\alpha y^3 + 4\alpha x^2 z~~ 3\alpha \int_0^y y^2 dy + 4\alpha x^2 \int_0^z dz \\
 &= \alpha y^3 + 4\alpha x^2 z
 \end{aligned}$$

QUESITO 2

Il moto del centro di massa della sbarra è regolato dalle equazioni

$$\vec{F}(c) = \pi \vec{g}_{cm}$$

da cui

$$-\pi g = \pi \ddot{z}_{cm}$$

$$\text{e quindi } \ddot{z}_{cm} = -g.$$

Il centro di massa è soggetto ad un moto uniformemente accelerato per cui

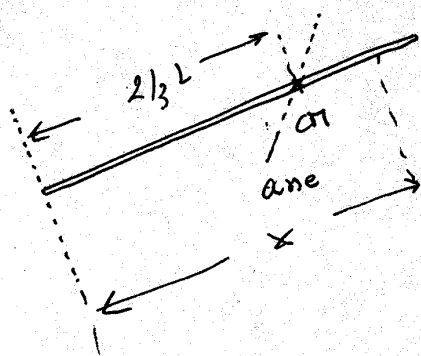
$$z_{cm}^* = z_0 - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{e} \quad \dot{z}_{cm} = -g t$$

Notiamo anche che il momento applicato delle forze esterne è nullo per cui la velocità angolare ^{della} sbarra si manterrà costante.

L'energia cinetica vale allora

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \pi v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \pi g^2 t^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Calcoliamo ora il momento d'inerzia delle sbarre rispetto all'asse di rotazione (asse passante per il centro di massa e normale alle sbarre stesse).



Determiniamo prima il c

$$x_{cm} = \frac{\int x dm}{M} = \frac{\int_0^L x \lambda dx}{M}$$

$$= \frac{\int_0^L x \beta x dx}{M} = \frac{\frac{1}{3} \beta L^3}{M}$$

tenendo conto che

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \int_0^L \beta x dx$$

si ottiene

$$x_{cm} = \frac{1}{3} L \cdot 2 = \frac{2}{3} L.$$

Ora il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro di massa vale

$$I = \int r^2 dm = \int_0^L \left(x - \frac{2}{3}L\right)^2 \lambda dx = \int_0^L \left(x - \frac{2}{3}L\right)^2 \beta x dx$$

$$= \int_0^L \left(x^2 + \frac{4}{9}L^2 - \frac{4}{3}xL\right) \beta x dx = \int_0^L \left(\beta x^3 + \frac{4}{9}\beta L^2 x - \frac{4}{3}\beta x^2 L\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\beta L^4 + \frac{4}{9}\beta L^2 \frac{1}{2}L^2 - \frac{4}{3}\beta L \frac{1}{3}L^3$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right) \beta L^4 = \frac{9+8-16}{36} \beta L^4 = \frac{\beta L^4}{16}$$