Moti nel piano

Moti armonici semplici

il moto circolare uniforme nel piano proiettato sugli assi cartesiani produce

moti sinusoidali (armonici)

$$x(t) = r\cos(\ \theta(t)\ ) = r\cos(\ \omega t + \theta_0\ )$$

$$y(t) = r\,sen(\ \theta(t)\ ) = r\,sen(\ \omega t + \theta_0\ )$$

notare la differenza tra il concetto di pulsazione e di velocita' angolare

che coincidono nel moto circolare uniforme

Caratteristiche della proiezione del moto lungo un asse

l'equazione oraria del moto e'

$$x(t) = r\cos(\theta(t)) = r\cos(\omega t + \theta_0)$$

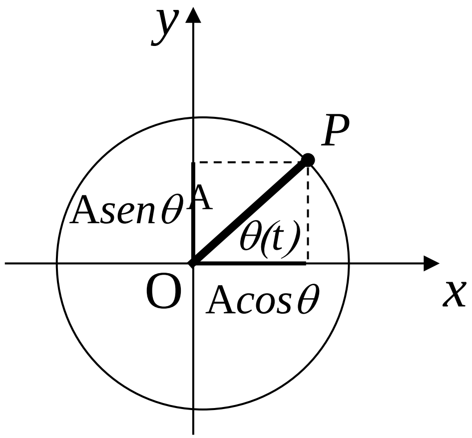
il moto e' oscillatorio ed e' compreso tra $-r$ e $+r$ → e' un moto "armonico semplice"

$$a(t) = dv/dt = d^2x/dt^2 = -\omega^2 r\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\Rightarrow \qquad d^2x(t)/dt^2 + \omega^2 x(t) = 0$$

e analogamente per la y

Richiami: il moto armonico piano



un punto materiale si muove di moto circolare uniforme

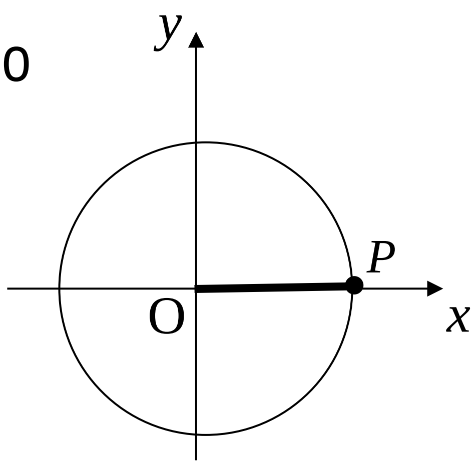
con velocita' angolare $\omega = d\vartheta / dt$

nel piano xy con $OA = A = r$ sia $\theta(t)$ l'angolo

tra r e l'asse delle ascisse al generico tempo t

se al tempo $t = 0$ il punto si trova nella posizione $(+r, 0)$

$\rightarrow$ $\theta_0 = \theta(0) = 0$ e le proiezioni del moto sugli assi sono



$$x = A\cos\vartheta(t)$$

$$y = A sen\vartheta(t)$$

$$\frac{x}{A} = \cos(\omega t) \quad \frac{y}{A} = sen(\omega t) \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = A^2$$

dunque la traiettoria e' una circonferenza, ma in quale senso e' percorsa,

orario o antiorario ?

$$x = A\cos\omega t$$

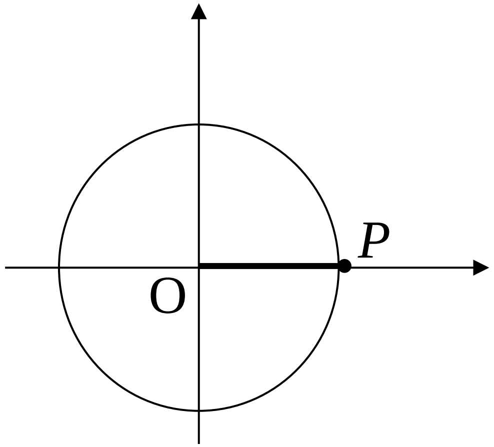
se

$$y = Asen\omega t$$

a $t = 0$

$$x(t=0) = A\cos 0 = A$$

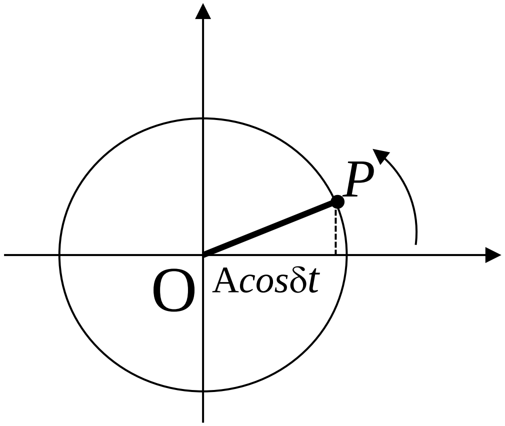
$$y(t=0) = Asen\omega t = 0$$



al tempo $t = +\ \delta t$

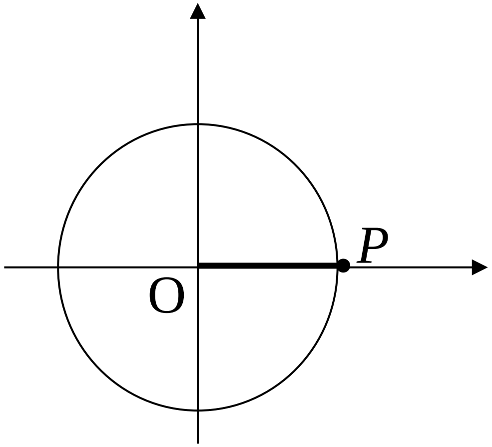
$$x = A\cos\delta t < A$$

$$y = Asen\delta t > 0$$



⇨ senso antiorario (levogiro)

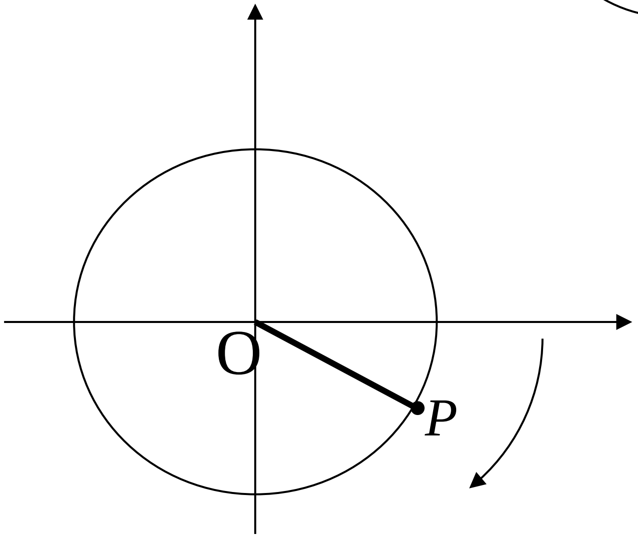
se
$$x = A\cos\omega t$$
$$y = -Asen\omega t$$



a $t = 0$
$$x(t=0) = A\cos 0 = A$$
$$y(t=0) = -Asen\omega t = 0$$

al tempo $t = +\ \delta t$

$$x = A\cos\delta t < A$$
$$y = -Asen\delta t < 0$$



⇨ senso orario (destrogiro)

la traiettoria e' ancora una circonferenza, ma il senso di percorrenza e' orario

- da notare che $y = -Asen\omega t = A\cos(\omega\,\mathrm{t} + \frac{\pi}{2})$

in particolare posto

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \delta)$$

se

$\delta = 0$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t)$$

$$y = x$$

traiettoria rettilinea

$\delta = \pi$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \pi) = -A\cos(\omega t)$$

$$y = -x$$

traiettoria rettilinea

$\delta = \frac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -Asen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

traiettoria circolare destrogira

$\delta = \frac{3\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = A\cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = Asen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1$$

traiettoria circolare levogira

piu' in generale posto $$x = A\cos(\omega t)$$ $$y = B\cos(\omega t + \delta)$$ se

$\delta = 0$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t)$$

$$y = \frac{B}{A}x$$ traiettoria rettilinea

$\delta = \pi$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \pi) = -B\cos(\omega t)$$

$$y = -\frac{B}{A}x$$ traiettoria rettilinea

$\delta = \frac{\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -B sen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ traiettoria ellittica destrogira

$\delta = \frac{3\pi}{2}$

$$x = A\cos(\omega t)$$
$$y = B\cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = B sen(\omega t)$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$ traiettoria ellittica levogira

due moti armonici indipendenti con differenza di fase di $\pi/2$ combinati insieme

possono dare origine non solo ad un moto circolare nel piano

ma modificando la fase relativa e/o la frequenza e/o l'ampiezza si possono

ottenere una serie di diverse traiettorie (figure di Lissajous)

per una dimostrazione in aula andare al sito :
http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/Lissajous.htm