La forza gravitazionale **sulla superficie della terra** e' detta **"forza peso"**

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

la forza peso e' conservativa

dimostrazione :

se si utilizza la prima definizione di conservativita' di un campo di forze

occorrera' dimostrare che il lavoro calcolato lungo un ***qualsiasi*** percorso ***non***

dipende dal percorso, ma solo dai valori che una funzione scalare della posizione

assume in corrispondenza delle coordinate degli estremi di partenza e di arrivo il lavoro effettuato da $\vec{P}$ nel passare da A a B lungo il percorso Γ

e' l'integrale di linea da A a B della forza peso

$\vec{P}\cdot d\vec{l} \equiv dL$ e' il lavoro infinitesimo di $\vec{P}$

e per definizione di integrale di linea $\displaystyle\int_{A}^{B} \vec{P}\cdot d\vec{l}$

$lungo\ \Gamma$

attenzione:

non si deve pensare di lasciare il corpo **libero di cadere** ma occorrera'

spostarlo bilanciando costantemente la forza peso $\vec{P}$ con una forza $\vec{F}_{est}$

uguale ed opposta alla forza peso di modo che ad ogni istante vi sia **equilibrio**

per far cio' bisogna che gli spostamenti siano molto piccoli, al limite infinitesimi

e che vengano effettuati molto lentamente, ossia eseguendo una trasformazione

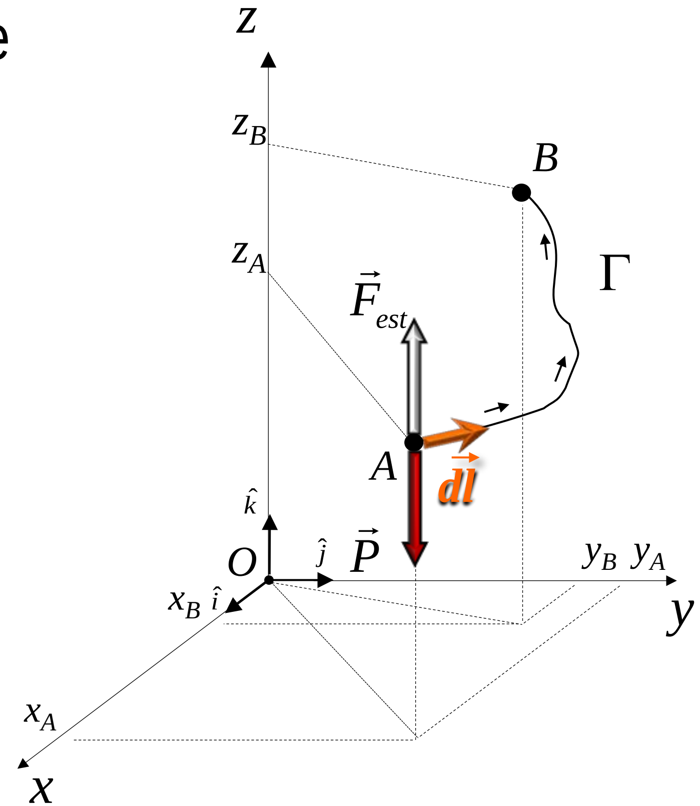
"*adiabatica*" nel tempo in questo modo si potra' valutare il lavoro effettuato da $\vec{F}_{est}$

e il lavoro fatto da $\vec{P}$ sara' uguale, ma contrario in segno, al lavoro fatto dall'esterno scelto un sistema di riferiento cartesiano ortogonale

ed un percorso Γ qualsiasi orientato da A a B

la forza peso e' un campo di forza costante

ed e' sempre diretta lungo la verticale, percio'



$$\vec{P} = 0\ \hat{i}\ + 0\ \hat{j} - mg\ \hat{k} \quad = -mg\ \hat{k}$$

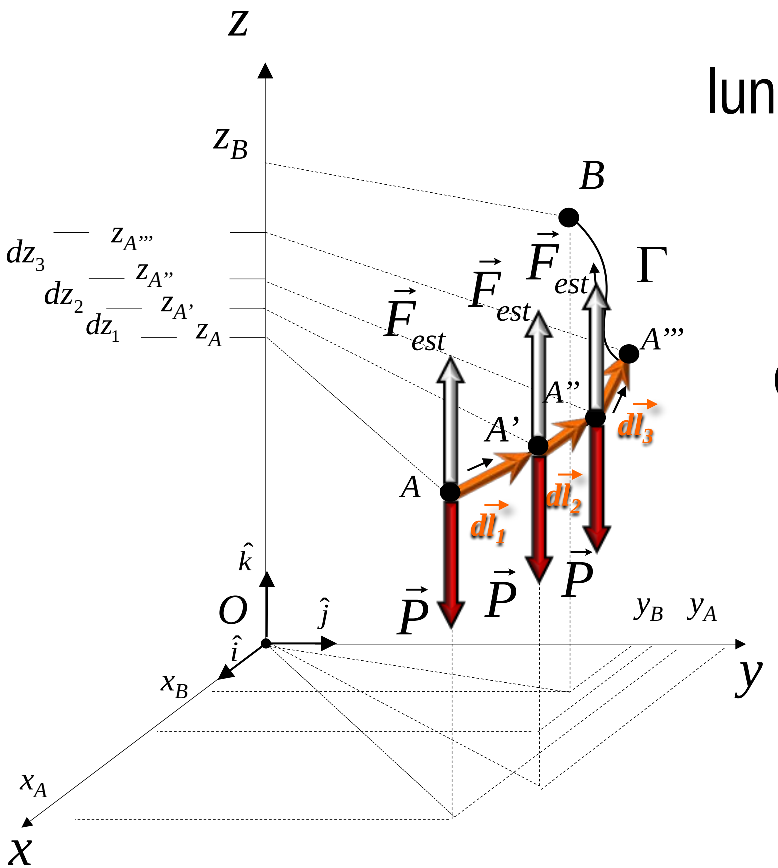
e la forza che equilibria $\vec{P}$ dovra' essere pari a $\vec{F}_{est} = -\vec{P} = mg\hat{k}$

infine l'espressione di un generico spostamento infinitesimo nello spazio sara'

$$\vec{dl} = dx\ \hat{i} + dy\ \hat{j} + dz\hat{k}$$

e il lavoro infinitesimo fatto dalla forza esterna lungo il primo spostamento sara'

$$dL_{1_{est}} \equiv \vec{F}_{est} \cdot d\vec{l}_1 = 0\ dx_1 + 0\ dy_1 + mg\ dz_1 = mg\ dz_1$$



lungo il secondo tratto sara' $dL_{2_{est}} = mg\ dz_2$

e cosi' via ⇨ lungo tutto il percorso da A a B

si avra' sempre $$dL_{est} = mg\ dz$$

per cui $\int_A^B \vec{F}_{est} \cdot d\vec{l} = \int_{x_A, y_A, z_A}^{x_B, y_B, z_B} (mg) dz = mg \int_{x_A, y_A, z_A}^{x_B, y_B, z_B} dz$

$= mg \int_{z_A}^{z_B} dz = (mgz_B - mgz_A)$ ma $L_{Peso} = -L_{est}$

$\Rightarrow$ $L_{Peso} = -(mgz_B - mgz_A)$ <u>qualunque sia il percorso</u> effettuato se $$L_{Peso} = -(mgz_B - mgz_A)$$

posto: $$E_P(A) = mgz_A$$ e $$E_P(B) = mgz_B$$

$$\Delta E_P = E_P(B) - E_P(A) = (mgz_B - mgz_A)$$

⇨ $$L_{Peso_{A\to B}} = -\Delta E_{P_{AB}}$$

Ricapitolando: si e' dimostrato che la forza peso e'conservativa

e che esiste una funzione scalare, detta energia potenziale gravitazionale,

che dipende solo dalle posizioni iniziali e finali, ma non dal percorso

la variazione dell'energia potenziale fornisce il lavoro effettuato dalla forza

peso nel passare da un punto ad un altro

l'espressione della energia potenziale per la forza peso dipende solo dalla

altezza rispetto al suolo ed e' data della espressione $E_{p_{peso}} = mgz$

Forza elastica

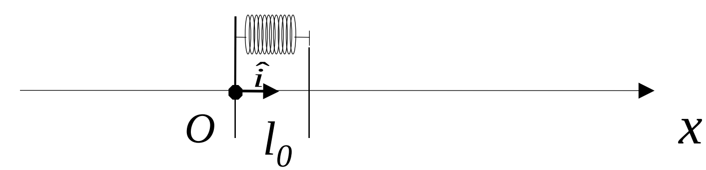
una forza elastica unidimensionale diretta lungo l'asse x ha espressione

$$\vec{F} = -k\ x\ \hat{i}$$ dove k e' una costante positiva per definizione

nella pratica per produrre una forza elastica si usa una molla costituita da un

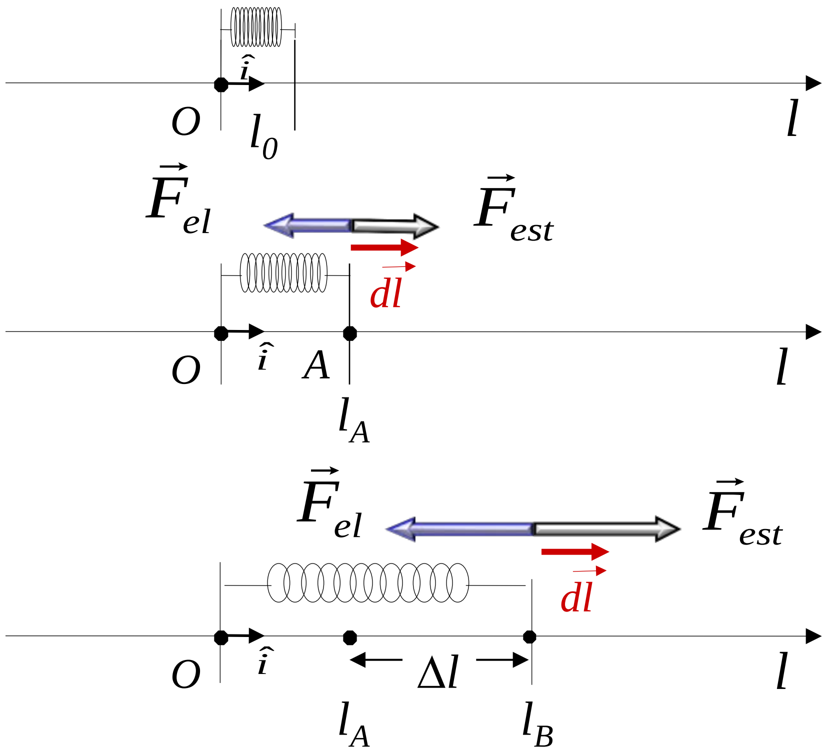
sottile filo metallico avvolto a spirale una molla ha una lunghezza a riposo l_0

e se la molla viene estesa o compressa



alla lunghezza l si manifesta una forza di richiamo proporzionale a $x = l - l_0$

che tende a riportare la molla alla lunghezza originale se portiamo la molla dalla posizione l_A a l_B



la stiamo allungando e l'elongazione

sara' $x_A = l_A - l_0$ nel punto A

e $x_B = l_B - l_0$ nel punto B

$$\Delta x = x_B - x_A = l_B - l_A = \Delta l$$

la forza elastica non e' costante durante lo spostamento percio' dovremo valutare

il lavoro per spostamenti infinitesimi ed integrare sul percorso

per elongazioni infinitesime, $\Delta x \to dx = dl$ ⇨ $d\vec{l} = dl\hat{i} \equiv dx\hat{i}$

$$\vec{F}_{el} = -kx\hat{i} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{est} = -\vec{F}_{el} = kx\hat{i}$$

se per semplicita' supponiamo che $l_0 = 0$ riesce che $l \equiv x$ per cui

$$\int_A^B \vec{F}_{est} \cdot d\vec{l} = \int_{x_A}^{x_B} kx\hat{i} \cdot dx\hat{i} = \int_{x_A}^{x_B} kxdx(\hat{i} \cdot \hat{i}) = k\int_{x_A}^{x_B} xdx$$

$$= \frac{k}{2}x^2\Big|_{x_A}^{x_B} = \frac{k}{2}x_B^2 - \frac{k}{2}x_A^2$$ il lavoro effettuato dalla forza elastica

sara' uguale ed opposto a quello effettuato della forza esterna

$$L_{el_{A\to B}} = -L_{est_{A\to B}} = \frac{k}{2}x_A^2 - \frac{k}{2}x_B^2 = -(\frac{k}{2}x_B^2 - \frac{k}{2}x_A^2)$$

se si pone $E_{P_{el}} = \frac{1}{2}kx^2$ ⇨ $\Delta E_{P_{el}} = E_{P_{el}}(B) - E_{P_{el}}(A)$

$$= \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$$ ⇨ $$L_{el_{A\to B}} = -\Delta E_{P_{el}}$$

possiammo concludere che la forza elastica e' conservativa

$$E_{P_{el}} = \frac{1}{2}kx^2$$

e' detta <u>energia potenziale elastica</u>,

Energia dell'oscillatore armonico unidimensionale

$$\left|\vec{F}\right| = F = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{dove} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

infatti per la seconda legge della dinamica $\left|\vec{F}\right| = F = ma$

perciò'se $\left|\vec{F}\right| = F = -kx$ uguagliando si ha $ma = -kx$

ossia $ma + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad a + \dfrac{k}{m}x = 0$

ma $a = \dfrac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

la soluzione è una funzione armonica del tipo $x(t) = Asen(\omega t + \varphi)$

per cui $\mathrm{v}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \phi)$

la forza elastica è conservativa dunque l' *energia meccanica* sara' costante

durante il moto

$$E_c(t) = \tfrac{1}{2} m\mathrm{v}^2\left(t\right) = \tfrac{1}{2} mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p(t) = \tfrac{1}{2} kx^2(t) = \tfrac{1}{2} kA^2 sen^2(\omega t + \varphi)$$

l’energia meccanica e’:

$$E_m = E_c + E_p = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2 A^2 = cost$$

in assenza di forze dissipative l’energia meccanica dell’oscillatore armonico e’

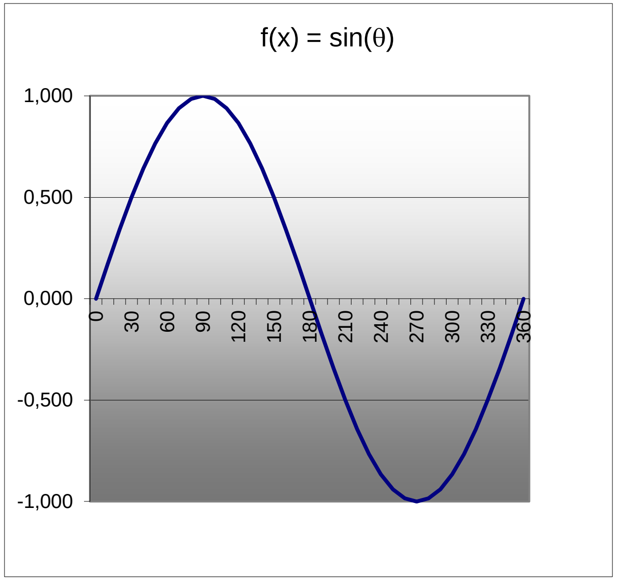
→ una costante del moto e vale

$$E_M = \frac{1}{2}m\ \omega^2 A^2 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Valor medio durante un periodo

il valore medio di una funzione in un intervallo $[x_1,x_2]$ e'

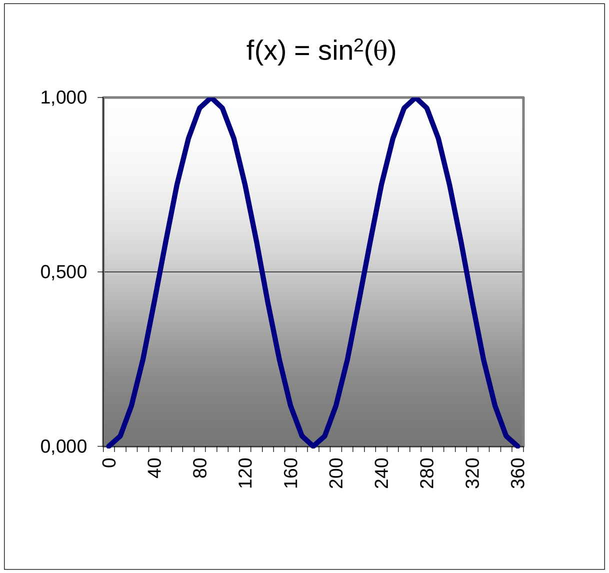
$$f_m = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$



la media su di un periodo della funzione seno (coseno) e' zero

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} sen\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi}(-\cos\vartheta)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

la media su di un periodo della funzione seno al quadrato (coseno al quadrato) vale 1/2



$$\int sen^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta - sen\vartheta\cos\vartheta) + C$$

$$\int \cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}(\vartheta + sen\vartheta\cos\vartheta) + C$$

⇨ $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}$ e $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}$

Lavoro di una forza di attrito

in generale una forza di attrito radente dinamico avra' espressione

$$\vec{F}_a = -\mu_d N \hat{u}_{\mathrm{v}}$$

dove $\hat{u}_{\mathrm{v}}$ e' il versore della <u>velocita' relativa</u>

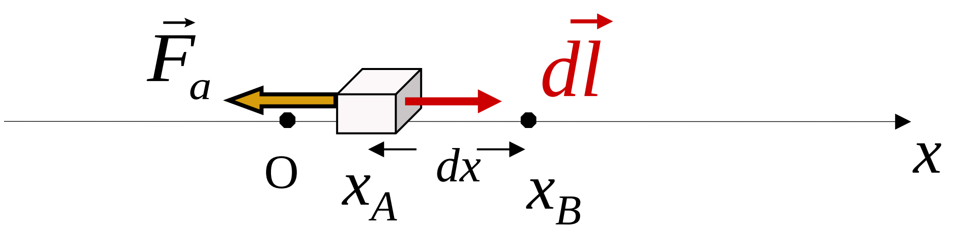
tra le due superfici a contatto tra loro e μ_d e' il coefficiente di attrito dinamico

per il caso semplice di moto rettilineo lungo l'asse delle ascisse

nel passare da x_A a x_B la forza di attrito e' ***discorde*** allo spostamento

$$\vec{F} = -\mu_d N \hat{i} \qquad \mu_{\mathrm{d}} > 0$$

$$d\vec{l} = dx\hat{i}$$



il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F} = -\mu_d N\hat{i}$

nel muovere un corpo materiale da x_A a x_B sara'

$$\int_{x_A}^{x_B} \vec{F} \cdot dx\hat{i} = \int_{x_A}^{x_B} -\mu_d N\hat{i} \cdot dx\hat{i} = -\mu_d N \int_{x_A}^{x_B} dx$$

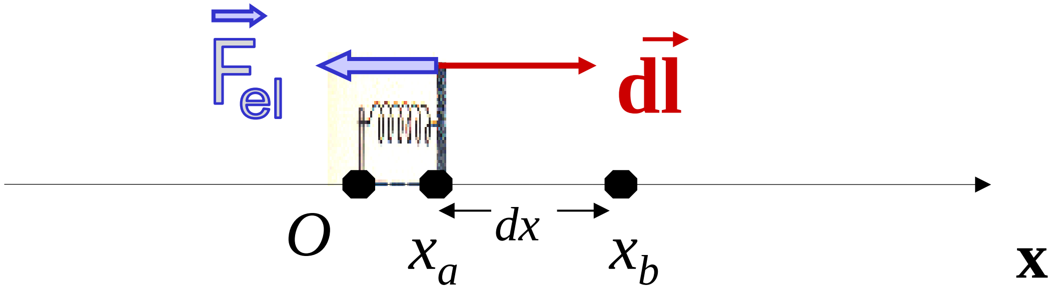
Nota Bene : dx e' la lunghezza infnitesima lungo il percorso da A a B

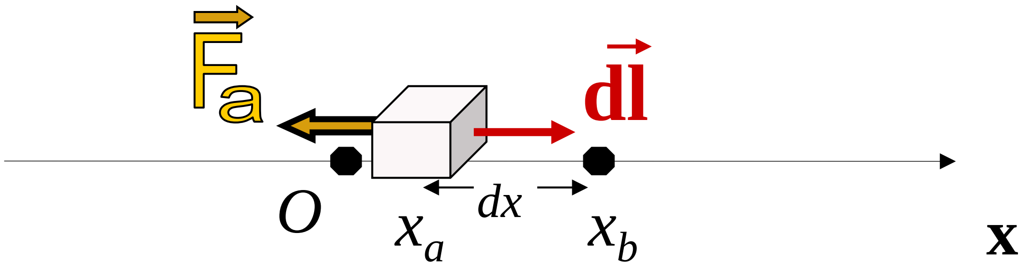
e $\int_{x_A}^{x_B} dx$ e' la lunghezza del percorso stesso

quindi il lavoro di una forza di attrito dinamico **dipendera' dal percorso !!**

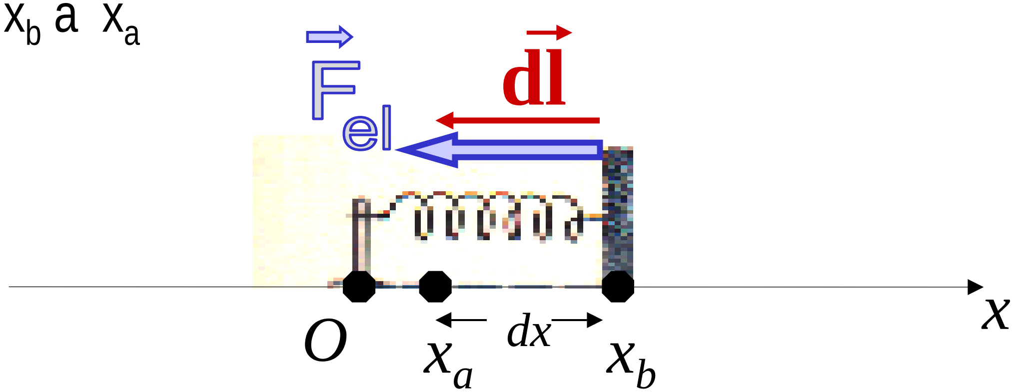
in conclusione : la forza di attrito dinamico ***<u>NON</u>*** è una forza conservativa !!

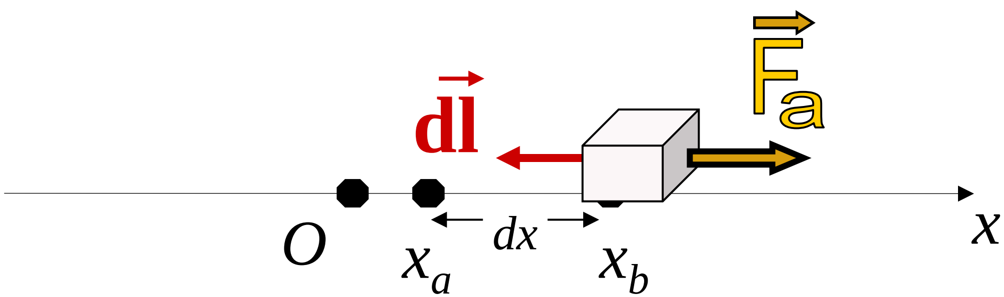
da x_a a x_b





da x_b a x_a





Backup slides