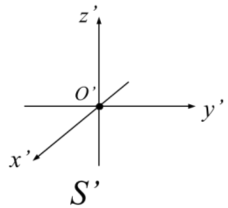
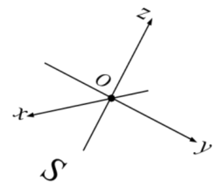
Moti relativi

trasformazioni galileiane per un generico moto relativo di *rototraslazione* del sistema mobile S rispetto al sistema fisso S'

- si assume che l'osservatore sia solidale con il sistema S'
- si assume che il sistema mobile sia il sistema S

attenzione: di solito la notazione e' l'opposto !





sistema S' fisso e solidale con l'osservatore posto in O'

S' e' definito dai versori $\hat{i}'$ $\hat{j}'$ $\hat{k}'$

sistema S mobile nello spazio

S e' definito dai versori $\hat{i}$ $\hat{j}$ $\hat{k}$

notazione : tutte le quantita' accentate si riferiscono alle grandezze quando sono considerate a partire dal sistema S'

- grandezze riferite al sistema fisso S' saranno denominate *assolute* e saranno individuate dal pedice A
- grandezze riferite al sistema mobile S saranno denominate *relative* e saranno individuate dal pedice R
- verra' usata la scrittura abbreviata $\dfrac{dx}{dt} \Rightarrow \dot{x}$

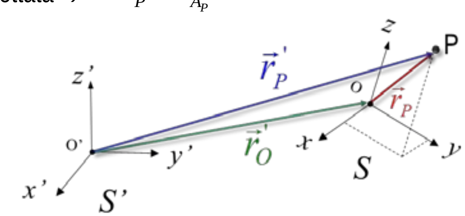
Trasformazione del vettore posizione

$\vec{r}_P$ la posizione del generico punto P vista a partire dal sistema di riferimento mobile S $\vec{r}_P = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ secondo la convenzione adottata → $\vec{r}_P \equiv \vec{r}_{R_P}$

$\vec{r}_O\,'$ la posizione di O vista a partire dal sistema di riferimento S' secondo la convenzione adottata → $\vec{r}_O\,' \equiv \vec{r}_{A_O}$

$\vec{r}_P\,'$ la posizione del generico punto P vista a partire dal sistema di riferimento fisso S' $\vec{r}_P\,' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'$ per la convenzione adottata → $\vec{r}_P\,' \equiv \vec{r}_{A_P}$

trasformazione del vettore posizione → $\vec{r}_P\,' = \vec{r}_P + \vec{r}_O\,'$ ovvero $\vec{r}_{A_P} \equiv \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_O}$ → $\vec{r}_{A_P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + \vec{r}_{A_O}$



Trasformazione della velocita'

derivando $\vec{r}_{A_P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} + \vec{r}_{A_O}$ rispetto al tempo $\dfrac{d\vec{r}_{A_P}}{dt} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} + x\dfrac{d\hat{i}}{dt} + y\dfrac{d\hat{j}}{dt} + z\dfrac{d\hat{k}}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{A_O}}{dt}$

posto $\dfrac{d\vec{r}_P{}'}{dt} = \vec{v}_{A_P}$ → velocita' di P nel sistema fisso S', ossia velocita' "***assoluta***" di P

e $\dfrac{d\vec{r}_{A_O}}{dt} = \vec{v}_{A_O}$ → velocita' di O nel sistema fisso S', ossia velocita' "***assoluta***" di O

e $\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} = \vec{v}_{R_P}$ → velocita' di P nel sistema mobile S, ossia velocita' "***relativa***" di P

⇨ $$\vec{\mathbf{v}}_{A_P} \equiv \vec{\mathbf{v}}_{R_P} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{A_O}$$

il termine: $x\dfrac{d\hat{i}}{dt} + y\dfrac{d\hat{j}}{dt} + z\dfrac{d\hat{k}}{dt} + \vec{v}_{A_O} = \vec{v}_T$ e' detta "*velocita' di trascinamento*" perche' e' la velocita' che avrebbe P rispetto ad S' se la posizione di P fosse fissata rigidamente rispetto all'origine O del sistema S

in conclusione: $$\vec{\mathbf{v}}_{A_P} = \vec{\mathbf{v}}_{R_P} + \vec{\mathbf{v}}_T$$

Trasformazione dell' accelerazione

$$\vec{\mathrm{v}}_{A_P} = \vec{\mathrm{v}}_{R_P} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt} + \vec{\mathrm{v}}_{A_O}$$

derivando rispetto al tempo la velocita'

$$\vec{a}_{A_P} = \frac{d\vec{\mathrm{v}}_{R_P}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}\right) + \frac{d\vec{\mathrm{v}}_{A_O}}{dt}$$

ma $\vec{\mathrm{v}}_{R_P} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k}$ per cui

$$\frac{d\vec{\mathrm{v}}_{R_P}}{dt} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} + \dot{x}\frac{d\hat{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\hat{k}}{dt}$$

mentre

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}\right) = \dot{x}\frac{d\hat{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{j}}{dt} + \dot{z}\frac{d\hat{k}}{dt} + x\frac{d^2\hat{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\hat{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\hat{k}}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{A_P} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} + 2\dot{x}\frac{d\hat{i}}{dt} + 2\dot{y}\frac{d\hat{j}}{dt} + 2\dot{z}\frac{d\hat{k}}{dt} + x\frac{d^2\hat{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\hat{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\hat{k}}{dt^2} + \frac{d\vec{\mathrm{v}}_{A_O}}{dt}$$

$\frac{d\vec{\mathrm{v}}_{A_O}}{dt}$ fornisce la accelerazione di O nel sistema fisso S', ossia la accelerazione "*assoluta*" di O quindi $\frac{d\vec{\mathrm{v}}_{A_O}}{dt} = \vec{a}_{A_O}$

$\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k}$ fornisce l'accelerazione di P nel sistema mobile S ossia l' accelerazione "*relativa*" di P quindi $\ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \ddot{z}\hat{k} = \vec{a}_{R_P}$

il temine: $x\frac{d^2\hat{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\hat{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\hat{k}}{dt^2} + \vec{a}_{A_O}$ e' detta "accelerazione di trascinamento" $\vec{a}_T$ perche' e' l'accelerazione che avrebbe il punto P, rispetto al sistema fisso S', se fosse solidale con il sistema mobile S infine il termine $2\dot{x}\frac{d\hat{i}}{dt} + 2\dot{y}\frac{d\hat{j}}{dt} + 2\dot{z}\frac{d\hat{k}}{dt}$ e' detta accelerazione "complementare" o di Coriolis $\vec{a}_C$

dunque $$\boldsymbol{\vec{a}_{A_P} = \vec{a}_{R_P} + \vec{a}_T + \vec{a}_C}$$

le espressioni della velocita' di trascinamento, dell' accelerazione di Coriolis e dell' accelerazione di trascinamento possono essere semplificate utilizzando le formule di Poisson

Dimostrazione in aula

Backup Slides