Velocita' areolare

dato un punto materiale in moto lungo una determinata traiettoria e' detta

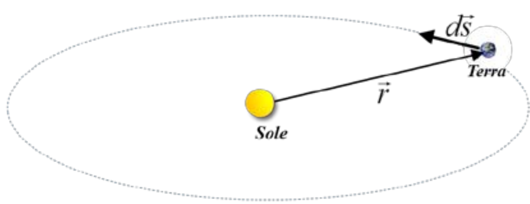
" **<u>velocità areolare</u>**" $\vec{v}_A$ la grandezza <u>vettoriale</u> che per definizione ha

- modulo pari alla derivata rispetto al tempo dell'area spazzata dal vettore posizione $\vec{r}$
- direzione perpendicolare al piano istantaneo dell'orbita
- verso dato dalla regola della mano destra

del tutto in generale risulta che : $\vec{v}_A = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$

Velocita' areolare

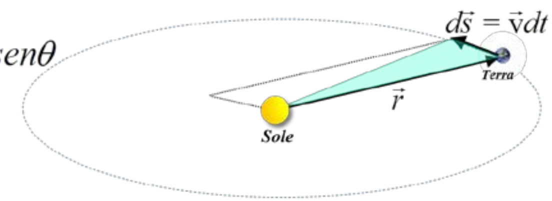
$$\vec{v}_A = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$



$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = AB\left|sen\vartheta\right| =$ area del parallelogrammo di lati A e B

consideriamo per semplicita' orbite circolari $\Rightarrow$ $\left|\vec{r}\right| = r = cost$

$$Area = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times d\vec{s}\right| = \frac{1}{2} rds\ sen\theta$$



in questo caso $sen\theta = 1$

$$\frac{d(Area)}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}rds) = \frac{1}{2}r\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}r\mathrm{v}$$

in un orbita circolare in modulo $\mathrm{v} = \omega r$

quindi $\frac{d(Area)}{dt} = \frac{1}{2}r\mathrm{v} = \frac{1}{2}r^2\omega$

Leggi di Keplero

1) i pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei fuochi dell'ellisse

2) la velocita' ***areolare*** e' costante

3) il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta e' proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita :

$$T^2 = k\, r^3$$

sempre considerando per semplicita' orbite circolari

il modulo del momento angolare di un pianeta di massa m_p , rispetto al sole, e'

$L = I\omega = m_p r^2\omega$ in termini di momento angolare $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{L}{m_p}$

velocita' areolare costante implica che il momento angolare sia costante

e, da $\vec{M} = d\vec{L}/dt$ cio' significa che il momento della forza rispetto al sole

sara' <u>nullo</u> lungo tutta l'orbita e cio' puo' essere vero solo se la forza

gravitazionale e' sempre diretta verso il centro della traiettoria

→ la forza di gravita' e' una <u>*forza centrale*</u>

Orbite circolari

il modulo dell'accelerazione centripeta e' : $v^2/r = \omega^2 r$

$$\Rightarrow \quad F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \quad = m\frac{4\pi^2}{T^2} r$$

applicando la terza legge di Keplero $T^2 = k\,r^3$ si ha

$$F = m\frac{4\pi^2}{k}\frac{r}{r^3} = \frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$$

in conclusione (in linguaggio "moderno")

- la seconda legge di Keplero afferma che la forza gravitazionale deve essere una forza centrale
- la terza afferma che la forza deve dipendere dall' inverso del quadrato della distanza

Legge di gravitazione universale di Newton

due masse m_1 ed m_2 ***puntiformi*** ***ferme*** ***e poste a distanza r tra loro*** ***nel vuoto*** si attirano tra loro con una forza pari a

$$\vec{F}_G = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{u}_r$$

$$\left|\vec{F}_G\right| = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad \gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{Kg\cdot s^2}$$

ovvero: $\gamma = 6.67\cdot 10^{-11}\,Nm^2 Kg^{-2}$

Massa inerziale e massa gravitazionale

la $\vec{F} = m\vec{a}$ stabilisce una relazione di proporzionalita' tra forza ed accelerazione, attraverso la grandezza fisica detta massa inerziale m_I

nella legge di gravitazione universale compare di nuovo una massa detta massa gravitazionale m_G

la forza di gravitazione sulla superficie terrestre e' cio' che chiamiamo forza peso $m_I g$

uguagliando la forza peso alla forza di gravitazionale universale si ha

$$m_I g = \gamma\frac{m_G M_{T_G}}{R_T^2} \quad \Rightarrow \quad g = \gamma\frac{M_{T_G}}{R_T^2}\frac{m_G}{m_I}$$

sperimentalmente in uno stesso luogo g non dipende dai corpi e questo significa che il rapporto tra la massa inerziale e quella gravitazionale deve essere **costante**

$$\frac{m_G}{m_I} = cost$$

e' ragionevole e conveniente supporre che questo rapporto assuma un valore unitario, ma a priori non c'e' motivo di ritenere che la massa inerziale debba essere uguale a quella gravitazionale tant' e' che Einstein impose l'uguaglianza tra massa inerziale e gravitazionale come uno dei postulati fondamentali della teoria della relativita' generale

Determinare l' accelerazione di gravita' sulla superficie della terra ed in funzione della quota

in modulo la forza peso e' $F_P = mg$ dove F_P = forza peso

m = massa inerziale di un generico corpo e g = accelerazione di gravita'

in modulo la forza di gravitazione universale e' $F_g(r) = \gamma m M_T / r^2$

M_T = massa terra e r = distanza tra il centro della terra e il corpo

attenzione questo sarebbe rigorosamente vero solo se la terra fosse puntiforme

→ Teorema di Gauss

assumendo valida l' uguaglianza tra massa inerziale e massa gravitazionale

e uguagliando la forza peso alla forza gravitazionale si ha

$$mg = \gamma m M_T / r^2 \quad \text{ossia} \quad g = \gamma M_T / r^2$$

- se $r \sim R_T \Rightarrow g = \gamma M_T / R_T^2 = 9.81\ msec^{-2}$

- se $r > R_T \Rightarrow F_g(r) = \gamma m M_T / r^2$ e da $g(r) = F_g(r) / m$

si ha $g(r) = \gamma M_T / r^2$ moltiplicando e dividendo per R_T^2

dato che $g = \gamma M_T / R_T^2 = 9.81 \Rightarrow$ $$g(r) = 9.81\ R_T^2 / r^2$$

Conservativita' della forza di gravitazione universale

il lavoro effettuato per spostare una massa m_2 dal punto A al punto B lungo

il percorso Γ in presenza di una campo gravitazionale generato da una

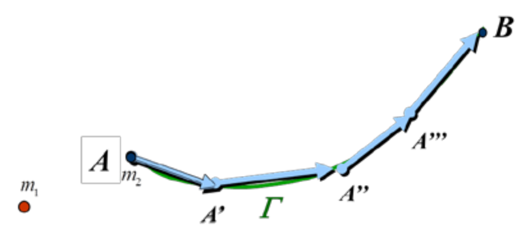
massa m_1 e' $L_{A\to B} = \int_{A\ (\text{lungo } \Gamma)}^{B} \vec{F}_G \cdot d\vec{s}$

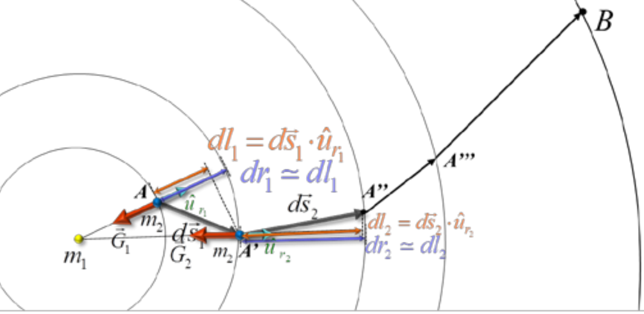
per calcolare l'integrale $\int_{A\ (\text{lungo } \Gamma)}^{B} \vec{F}_G \cdot d\vec{s}$ si dovra' suddividere il percorso

in tratti infinitesimi $d\vec{s}_i$ orientati lungo la linea Γ prescelta

e ***mantenendo ferma*** la massa m_1 si spostera' la massa m_2

dal punto A al punto B $\boxed{\text{operando}}$ ***adiabaticamente*** nel tempo





$$dL_1 = \vec{G}_1 \cdot d\vec{s}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2} \hat{u}_{r_1} \cdot d\vec{s}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2} dl_1 \simeq -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2} dr_1$$

$$dL_2 = \vec{G}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2^2} \hat{u}_{r_2} \cdot d\vec{s}_2 \Rightarrow dL_2 \simeq -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2^2} dr_2$$

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\gamma \frac{m_1 m_2 dr}{r^2} = -\gamma m_1 m_2 \int_A^B \frac{dr}{r^2} = (-\gamma m_1 m_2)(-\frac{1}{r})\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{\gamma m_1 m_2}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} \quad \text{dunque} \quad L_{A\to B} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A}$$

Energia potenziale gravitazionale

il lavoro effettuato dalla forza gravitazionale per portare una massa m_2

dal punto A al punto B lungo una ***qualsiasi*** curva Γ

$$\int_\Gamma \vec{F}_G \cdot d\vec{s} = \int_\Gamma -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A}$$

dunque la forza di gravitazione e' conservativa e puo' essere derivata da una

funzione scalare denominata energia potenziale gravitazionale $U(r)$

$$U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad \text{o piu' correttamente} \quad U(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} + \text{cost}$$

nel S.I. l'energia potenziale gravitazionale si misura in Joule

a volte si incontra la definizione: l' energia potenziale gravitazionale

e' il lavoro che occorre fare dall' <u>esterno</u> per portare una massa di prova m_2

dall'infinito a distanza r_B da una massa sorgente m_1 fissa nello spazio

Ma e' la stessa definizione di prima infatti il lavoro che occorrera' fare dall'esterno

per portare la massa m_2 dal punto A ad un punto B

sara' uguale ed opposto al lavoro effettuato dalla forza gravitazionale

quindi $L_{A\to B} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}$

se $A = \infty$ $L_{\infty\to B} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}$

Potenziale gravitazionale

si definisce <u>potenziale gravitazionale</u> (V) l'energia potenziale gravitazionale per

unita' di massa di prova m_2

$$V = \frac{U}{m_2}$$

Velocita' di fuga dalla Terra

il campo gravitazionale e' conservativo   quindi si avra' conservazione della energia meccanica

→ la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale sono costanti durante il moto
all'infinito l'energia potenziale gravitazionale sara' nulla quindi :

$$\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 - \gamma\frac{mM_T}{R_T} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_\infty^2 + 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v}^2 = \mathrm{v}_\infty^2 + 2\gamma\frac{M_T}{R_T}$$

la velocita' di fuga v_f e' quella velocita' di lancio che fa giungere il corpo di massa m all'infinito con velocita nulla

imponendo $\mathrm{v}_\infty = 0$ si ottiene : $\mathrm{v}_f = \sqrt{2\gamma\frac{M_T}{R_T}}$

$$velocita'\ di\ fuga\ dalla\ terra = 11200\ ms^{-1}$$

Backup Slides