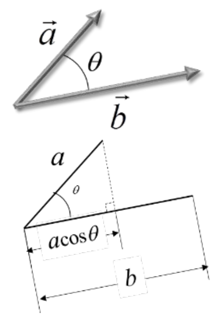
Operazioni con i vettori

la moltiplicazione di un vettore $\vec{a}$ per uno scalare k ($k \in \mathbb{R}$) fornisce un vettore

se $\vec{b} = k\,\vec{a}$ → $\vec{b}$ ha : modulo uguale a $|k|$ volte il modulo di $\vec{a}$ stessa direzione di $\vec{a}$, verso concorde ad $\vec{a}$ se $k > 0$ verso discorde ad $\vec{a}$ se $k < 0$

se $k = -1$ si ha $\vec{b} = -\,\vec{a}$ → $\vec{b}$ e' il *vettore opposto* ad $\vec{a}$ e ha stesso <u>modulo</u> di $\vec{a}$, stessa <u>direzione</u> di $\vec{a}$, verso <u>*opposto*</u> ad $\vec{a}$

Prodotto scalare



il *prodotto scalare* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e' la grandezza $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\vartheta = ab\cos\vartheta$

il prodotto scalare e' un *numero*

se i due vettori sono <u>perpendicolari</u> tra loro $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

il prodotto scalare • gode della proprieta' commutativa : $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ • gode della proprieta' distributiva : $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

Prodotto scalare in componenti cartesiane

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k})$ sfruttando le proprieta' del prodotto scalare e il fatto che i versori $\hat{i}$ $\hat{j}$ $\hat{k}$

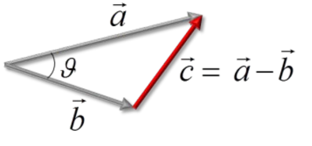
sono vettori unitari ($\hat{i}\cdot\hat{i} = 1$ etc.) e tra loro perpendicolari ($\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$ etc.) ⇨ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Quadrato di un vettore:

$\vec{a}\cdot\vec{a} = a\cdot a\cdot 1 = a^2$ il <u>quadrato di un vettore</u> e' uguale al <u>modulo quadrato del vettore</u> stesso

in coordinate cartesiane $\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ ⇨ $a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

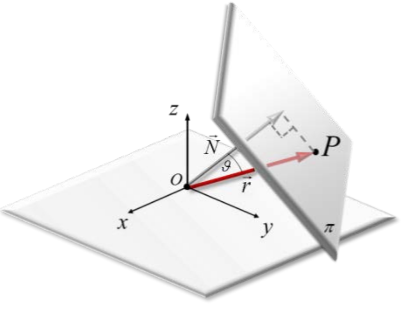
Legge di Carnot



se $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$ si ha $(\vec{a} - \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{c}$ ⇨ $a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = c^2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta$

Equazione del piano :



rispetto ad un determinato sistema di riferimento cartesiano ortogonale un qualunque piano π dello spazio

e' rappresentabile tramite un'equazione lineare in x, y, z del tipo $ax + by + cz + d = 0$

ma si puo' individuare anche assegnando la posizione di un punto generico P del piano π ed un vettore $\vec{N}$ non nullo <u>ortogonale</u> a π

se $\vec{N} = N_x\hat{i} + N_y\hat{j} + N_z\hat{k}$ e' perpendicolare al piano π e $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ e' il vettore posizione del generico punto P appartenente al piano π

⇨ $\vec{r}\cdot\vec{N} = xN_x + yN_y + zN_z$ e il piano puo' essere descritto dall'equazione $\vec{r}\cdot\vec{N} = N^2$ (dimostazione in aula)

Prodotto vettoriale

il **prodotto vettoriale** tra due vettori $\vec{a} \times \vec{b}$ fornisce un ***vettore*** il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ha :

→ modulo = $ab\,sen\,\vartheta$ → direzione perpendicolare al piano individuato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ → verso in cui si avvita una vite destrogira ruotando da $\vec{a}$ verso $\vec{b}$

oppure: si dispone la mano destra aperta lungo la direzione del ***primo*** vettore e la si chiude verso il ***secondo*** vettore (*seguendo l'angolo acuto tra i due vettori*)

il prodotto vettoriale **e' nullo** se i due vettori sono **paralleli** o **antiparalleli** → **il prodotto vettoriale di un vettore per se stesso e' nullo**

Proprieta' del prodotto vettoriale

il prodotto vettoriale: • <u>*NON*</u> soddisfa la proprieta' commutativa: $\vec{a}\times\vec{b}$ e' diverso da $\vec{b}\times\vec{a}$ in effetti se $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow \vec{b}\times\vec{a}=-\vec{c}$

• <u>*NON*</u> soddisfa la proprieta' associativa $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ e' diverso da $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

• gode della proprieta' distributiva $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

se $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ scomponendo $\vec{b}$ nel componente parallelo e in quello perpendicolare ad $\vec{a}$ $\rightarrow$ $\vec{b}=\vec{b}_{//}+\vec{b}_{\perp}$ $\Rightarrow$ $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times(\vec{b}_{//}+\vec{b}_{\perp})$

per la distributivita' del prodotto vettoriale $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}_{//}+\vec{a}\times\vec{b}_{\perp}$ ma $\vec{a}\times\vec{b}_{//}=0$ $\rightarrow$ $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}_{\perp}$ $\Rightarrow$ $|\vec{c}|=ab_{\perp}sen\vartheta \;\; =ab_{\perp}$

➢ il <u>modulo</u> del prodotto vettoriale e' pari al prodotto del modulo di un vettore per la componente dell'altro vettore <u>perpendicolare</u> al primo vettore

Prodotto vettoriale in componenti cartesiane

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})=a_x\hat{i}\times b_x\hat{i}+a_x\hat{i}\times b_y\hat{j}+a_x\hat{i}\times b_z\hat{k}+a_y\hat{j}\times b_x\hat{i}+\ldots\ldots a_z\hat{k}\times b_z\hat{k}$$

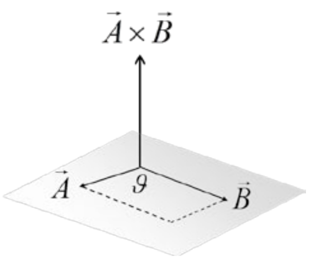
ma $(\hat{i}\times\hat{i}=0$ etc.$)$ $(|\hat{i}|=1$ etc.$)$ e $(\hat{i}\times j=\hat{k}$ etc.$)$ $\rightarrow$ $\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\hat{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k}$

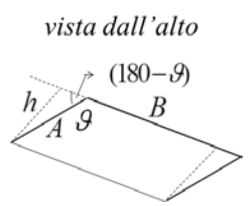
Regola di Cramer : le componenti del prodotto vettoriale si ottengono con lo sviluppo del determinante $\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

Area di un parallelogrammo

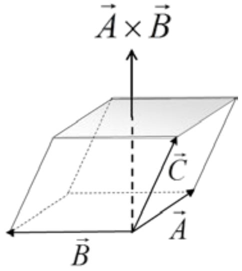
$|\vec{A}\times\vec{B}|=ABsen\vartheta$ ma $AB|sen\vartheta|=$ area del parallelogrammo di lati A e B

si puo' pensare ad $\vec{A}\times\vec{B}$ come al "**vettore area**" del parallelogrammo





Volume di un parallelepipedo



lo scalare $\left|(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}\right|$ e' il volume del parallelepipedo di base definita dai vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$

Triplo prodotto di vettori

esistono due tipi di prodotti tripli tra vettori che producono un vettore $(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$ e $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ *(prodotto vettoriale triplo)*

attenzione : $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

Identita' vettoriali utili

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C} = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

$\Rightarrow$ il prodotto vettoriale triplo puo' essere espresso come la differenza di due vettori

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = [\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{D})]\vec{C}-[\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})]\vec{D}$$

$$\vec{A}\times[\vec{B}\times(\vec{C}\times\vec{D})] = (\vec{A}\times\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D})-(\vec{A}\times\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$$

Backup Slides