Esercizio

Stabilire se il campo di forze

$$\vec{F} = -\alpha(y+2x)\hat{i} - \alpha(x-z)\hat{j} + \alpha y\hat{k}$$

sia conservativo e nel caso calcolarne la funzione energia potenziale

assumendo che essa sia nulla nell’origine .

Determinare inoltre quali siano le dimensioni e le unita’ di misura

della costante α .

l'espressione del rotore di un generico campo vettoriale $\vec{w}$ in coordinate cartesiane e'

$$\vec{\nabla}\times\vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y}-\frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial w_x}{\partial z}-\frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial w_y}{\partial x}-\frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

in questo caso $\vec{w} \equiv \vec{F} = -\alpha(y+2x)\hat{i}-\alpha(x-z)\hat{j}+\alpha y\hat{k}$

quindi $F_x = -\alpha(y+2x) \qquad F_y = -\alpha(x-z) \qquad F_z = \alpha y$

se $F_x = -\alpha(y+2x)$ $\quad F_y = -\alpha(x-z)$ $\quad F_z = \alpha y$

$\dfrac{\partial F_z}{\partial y} = \alpha$ e $\dfrac{\partial F_y}{\partial z} = \alpha$ ⇨ $\left(\dfrac{\partial F_z}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial z}\right) = 0$

$\dfrac{\partial F_x}{\partial z} = 0$ e $\dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0$ ⇨ $\left(\dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x}\right) = 0$

$\dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -\alpha$ e $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\alpha$ ⇨ $\left(\dfrac{\partial F_y}{\partial x} - \dfrac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$

⇨ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$ quindi $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$

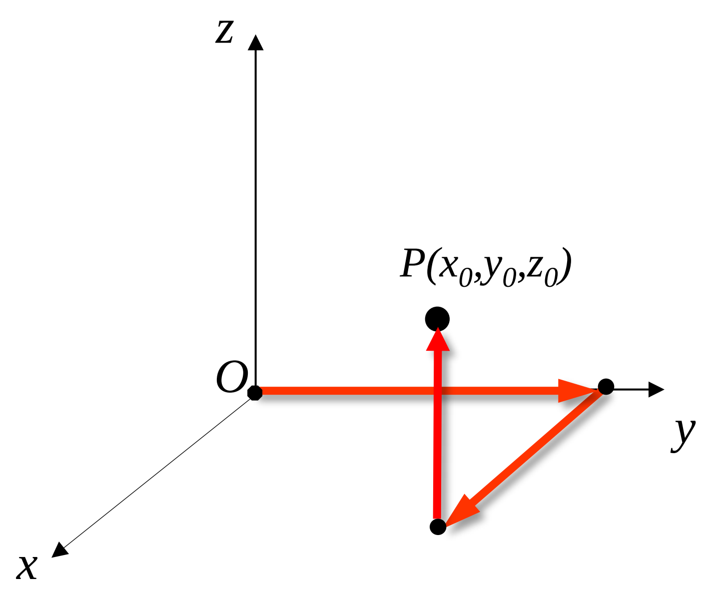
dunque il campo di forze assegnato e' conservativo percio’ esistera’ una funzione scalare dipendente solamente dalla posizione e tale per cui sara’ possibile ricavare il campo di forza come gradiente della funzione scalare stessa per valutarne l'espressione si puo' calcolare l'integrale di linea lungo un

percorso <u>qualsiasi</u> in particolare lungo un cammino rettilineo a tratti

partendo dall'origine $(0,0,0)$ fino ad arrivare ad un generico punto P

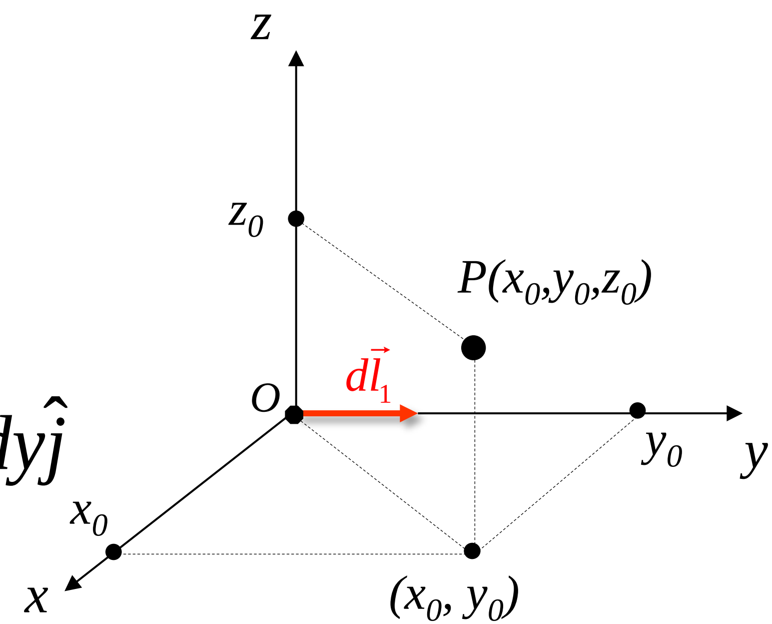
di coordinate (x_0, y_0, z_0)

per esempio :



primo tratto :

lungo il cammino da *(0,0,0)* a *(0,y_0,0)*



$$d\vec{l}_1 = dy\hat{j} \quad \text{quindi} \quad dL_1 = \vec{F}\cdot d\vec{l}_1 =$$

$$= [-\alpha(y+2x)\hat{i} - \alpha(x-z)\hat{j} + \alpha y\hat{k})]\cdot dy\hat{j}$$

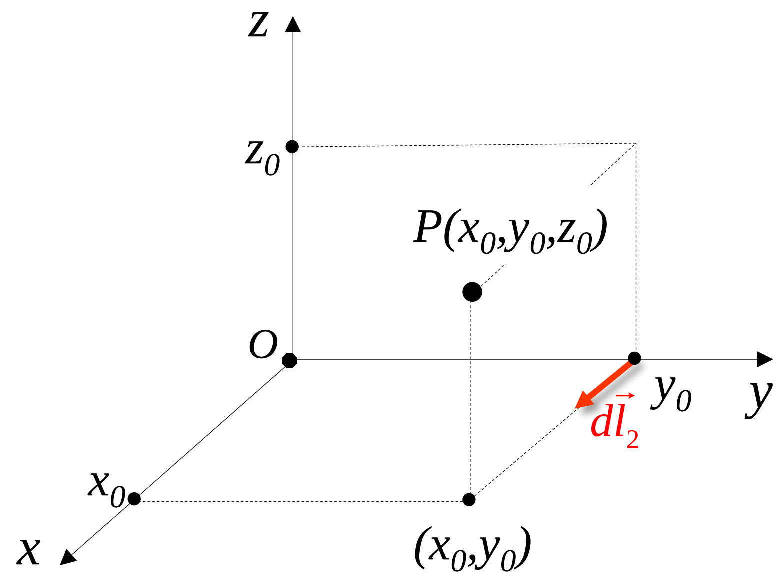
$$= -\alpha(x-z)dy\,\hat{j}\cdot\hat{j} \quad = -\alpha(x-z)dy$$

$$L_1 = \int_{0,0,0}^{0,y_O,0} \vec{F}\cdot d\vec{l}_1 = \int_{0,0,0}^{0,y_O,0} -\alpha(x-z)dy = -\alpha(x-z)y_O$$

ma lungo tutto il cammino da *(0,0,0)* a *(0,y_0,0)* si ha che $x = 0$ e $z = 0$

quindi $L_1 = 0$

secondo tratto :



lungo il cammino da $(0,y_0,0)$ a $(x_0, y_0,0)$

$$d\vec{l}_2 = dx\hat{i} \quad \text{quindi} \quad dL_2 = \vec{F}\cdot d\vec{l}_2$$

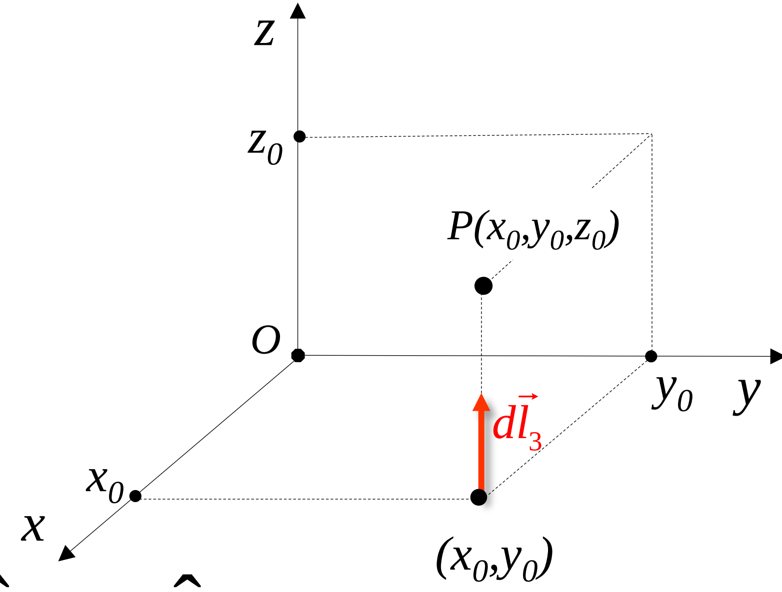
$$= (-\alpha(y+2x)\hat{i} - \alpha(x-z)\hat{j} + \alpha y\hat{k})\cdot dx\hat{i}$$

$$= -\alpha(y+2x)dx\ \hat{i}\cdot\hat{i} \ = -\alpha(y+2x)dx = -\alpha y dx - \alpha 2x dx$$

$$L_2 = \int_{0,y_O,0}^{x_O,y_O,0} \vec{F}\cdot d\vec{l}_2 = -\alpha y \int_{0,y_O,0}^{x_O,y_O,0} dx \ - \ \alpha \int_{0,y_O,0}^{x_O,y_O,0} dx^2 = -\alpha y x_O - \alpha x_O^2$$

ma $y = y_0$ e $z = 0$ lungo questo cammino percio' $L_2 = -\alpha y_0 x_O - \alpha x_O^2$

terzo tratto :



lungo il cammino da $(x_0,y_0,0)$ a (x_0, y_0, z_0)

$$d\vec{l}_3 = dz\hat{k}$$ quindi $$dL_3 = \vec{F}\cdot d\vec{l}_3 =$$

$$= (-\alpha(y+2x)\hat{i} - \alpha(x-z)\hat{j} + \alpha y\hat{k})\cdot dz\hat{k}$$

$$= \alpha y dz\ \hat{k}\cdot\hat{k} \quad = \alpha y dz$$

$$L_3 = \int_{x_O,y_O,0}^{x_O,y_O,z_O} \vec{F}\cdot d\vec{l}_3 = \alpha y \int_{x_O,y_O,0}^{x_O,y_O,z_O} dz = \alpha y z_O$$

lungo tutto questo cammino $x = x_0$ e $y = y_0$ quindi $$L_3 = \alpha y_O z_O$$

$$L_{Tot} = L_1 + L_2 + L_3 = 0 - \alpha y_O x_O - \alpha x_O^2 + \alpha y_O z_O$$

ma x_0 y_0 e z_0 sono punti qualsiasi $\Rightarrow$ $L = -\alpha(x^2 + xy - yz)$

se le forze in gioco sono conservative il lavoro puo' anche essere scritto come :

$L_{A\to B} = -\Delta U = U_A - U_B$ quindi $U_B = U_A - L_{A\to B}$

quindi la relazione tra lavoro e potenziale in questo particolare caso sara'

$$U(x,y,z) = U(0,0,0) - [-(\alpha(x^2 + xy - yz))] =$$

$= U(0,0,0) + \alpha(x^2 + xy - yz)$ e poiche'

$U(0,0,0) = 0$ si ha $U(x,y,z) = \alpha(x^2 + xy - yz)$

per verificare che il risultato sia corretto, dato che $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

calcoliamo le derivate parziali di $U(x,y,z,t)$ ossia

$$F_x = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial z}$$

ed in effetti se $U(x,y,z) = \alpha(x^2 + xy - yz)$ si ha

$$\vec{F} = -\alpha(y + 2x)\hat{i} - \alpha(x - z)\hat{j} + \alpha y\hat{k}$$

le dimensioni della costante α sono [MT^{-2}]

nel Sistema Internazionale l'unita' di misura di α e' N/m

Backup Slides