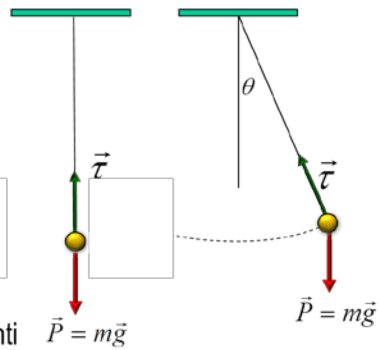
Pendolo semplice

il pendolo semplice consiste di un punto materiale di massa m appeso ad un filo ideale di lunghezza l all'equilibrio statico il pendolo e' nella posizione verticale,

se si allontana il punto dalla posizione di equilibrio e lo si rilascia inizia un moto circolare periodico

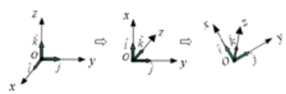


attenzione :

fuori dalla posizione di equilibrio la condizione e' dinamica percio' la risultante delle forze agenti non sara' uguale a zero, ma pari a $m\vec{a}$

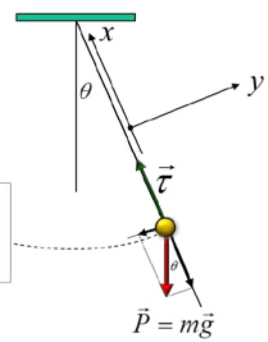
$$\Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{\tau} = m\vec{a}$$

proiettando le forze lungo la direzione del filo e lungo la direzione perpendicolare al filo ossia tangente alla traiettoria si ha



$$\tau - mg\cos\theta = ma_c$$

$$-mgsen\theta = ma_t$$



dove $\tau = |\vec{\tau}|$

e' il modulo della tensione nel filo

$$a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(r\theta)}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

in questo caso $r = l$ per cui :

$$a_c = \frac{v^2}{l}$$

$$a_t = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$ma_c \equiv m\frac{v^2}{l} = \tau - mg\cos\theta \Rightarrow \tau = m(g\cos\theta + \frac{v^2}{l})$$

$$ma_t \equiv ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgsen\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\theta = 0$$

la prima equazione fornisce la variazione della tensione nel filo in funzione del moto del punto materiale

la seconda equazione descrive il moto del punto materiale in termini angolari

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}sen\,\theta = 0$$

e' una equazione differenziale trascendente e non ha una semplice soluzione analitica

nella approssimazione di piccole oscillazioni e quindi per piccoli angoli si ha che

$$sen\vartheta \approx \vartheta$$

→ ***nell' approssimazione di piccole oscillazioni***, l'equazione del pendolo diviene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

che, posto $\omega^2 = \frac{g}{l}$ $\rightarrow$ $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$

equazione <u>dell'oscillatore armonico</u> percio' l'equazione oraria per l'angolo sara' del tipo

$$\theta(t) = \theta_0 sen(\omega t + \phi)$$

da $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ poiche' $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$ si ha

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

da notare come il periodo del pendolo

non dipenda dalla massa e soprattutto non dipenda per piccole oscillazioni

dall'ampiezza angolare (proprieta' di **isocronismo** del pendolo)

se l'ampiezza angolare dell'oscillazione non fosse piccola, si può dimostrare

che il periodo del pendolo dipenderebbe da $\vartheta_{\max}$

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\, K\left(sen\frac{\vartheta_{\max}}{2} \right)$$

dove K è l'integrale ellittico completo di prima specie, valutato in $sen\frac{\vartheta_{\max}}{2}$

l'integrale ellittico completo di prima specie *K* è definito come

$$K(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}\, dt$$

l'integrale puo' anche essere calcolato con il seguente sviluppo in serie di Taylor

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty} k^{2n}\frac{((2n)!)^2}{16^n (n!)^4}$$

Backup Slides