Urti elastici ed anelastici

un urto e’ una collisione tra corpi materiali che si verifica in intervalli di tempo **molto brevi**, in generale durante gli urti si manifestano tra i corpi forze di mutua interazione molto intense, dette impulsive, talmente piu’ intense delle altre forze in gioco che, per la breve durata dell’ urto, e sempre che si sia *in assenza di forze vincolari impulsive* possono essere considerate le uniche in azione

NOTA BENE : se non vi fossero forze impulsive in azione

ma l’urto fosse **istantaneo** o comunque di durata molto rispetto i tempi in gioco

allora anche in questo caso si potrebbe ritenere che valga la conservazione

della quantita’ di moto totale in quanto l’impulso durante l’urto tenderebbe

a zero e per il teorema dell’impulso la variazione di quantita’ di moto tenderebbe

sarebbe nulla → si conserva la quantita’ di moto totale ne consegue che durante l'urto il sistema di corpi interagenti puo' essere considerato isolato e da cio' ne deriva che

→ negli urti si ha la conservazione della quantita' di moto totale

<u>*in assenza vincoli impulsivi*</u>

centro di massa di un sistema di punti materiali

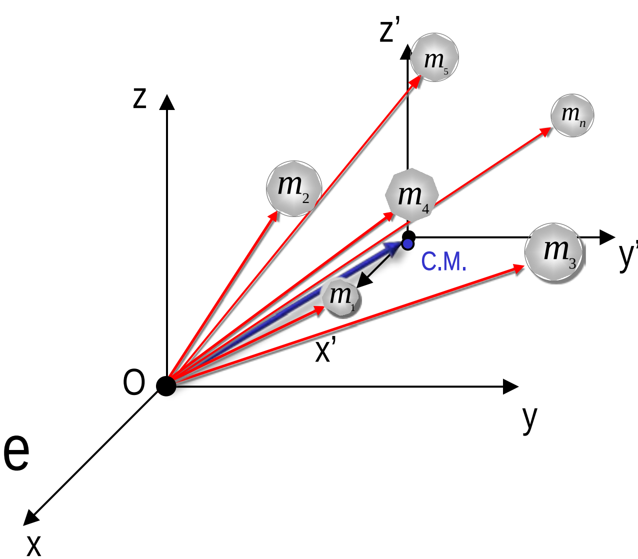
$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Sistema di riferimento del centro di massa

l'origine e' istante per istante collocata nel centro di massa del sistema di punti materiali

gli assi mantengono sempre lo stesso orientamento rispetto agli assi inerziali

quindi non si perde in generalita' se si assume che siano paralleli agli assi inerziali



- l' ***energia cinetica*** *di un corpo* *esteso* $E_{cinetica}$ e' dovuta al moto d'assieme del corpo

- l' ***energia potenziale*** *di un corpo esteso* $E_{potenziale}$ e' dovuta alla posizione occupata da un corpo in un campo di forze conservative esterno al corpo

- l' ***energia cinetica interna*** e' l'energia cinetica riferita al ***sistema del centro di massa*** del corpo e' dovuta ai movimenti **disordinati** (a caso, caotici , random) dei singoli componenti

- l' ***energia potenziale interna*** e' l'energia presente se tra i costituenti del corpo si esercitano forze interne conservative e' dovuta al tipo di legame che tiene uniti gli atomi e/o molecole, ed agli stati vibrazionali e rotazionali dei componenti il corpo → dipende da come e' costituito il corpo esteso *energia interna* = somma delle energie cinetica e potenziale interne

Energia totale = somma della energia interna e della energia cinetica e potenziale del corpo esteso

$$E_{Totale} \equiv E_{Interna} + E_{Cinetica} + E_{Potenziale}$$

negli urti tra corpi estesi ***in assenza di forze vincolari impulsive*** si conservano

l' *energia totale* e la *quantita' di moto totale*

Urto elastico

non cambia l' *energia interna* dei corpi in collisione, ossia
non cambia la forma dei corpi in collisione   se anche l'energia potenziale fosse costante, ad es. urto in un piano orizzontale, in un urto elastico si conserverebbe anche l' energia cinetica

Urto anelastico

parte dell'energia cinetica dei corpi in collisione si trasforma
in energia interna, ossia il corpo si deforma nella collisione
se l'energia cinetica che si trasforma in energia interna e' la massima possibile, *compatibilmente con la conservazione della quantita' di moto*, si parla di urto perfettamente anelastico

in conclusione:

qualunque sia il tipo di urto occorre prima di tutto, e sempre e soltanto se e' possibile, imporre la condizione di conservazione della quantita' di moto totale

dopo aver imposto questa condizione si puo' valutare quale sia il tipo di urto gli urti tra oggetti reali sono tutti in qualche modo anelastici

il coefficiente di restituzione e' il rapporto tra la quantita' di moto finale e

quella iniziale cambiato di segno

$$\varepsilon = -\frac{q_{finale}}{q_{iniziale}} \qquad \varepsilon \in [0,1]$$

se l'urto fosse perfettamente elastico, nel sistema del centro di massa di

due particelle identiche si avrebbe che $\vec{q}_{finale} = -\vec{q}_{iniziale}$

per un urto perfettamente elastico $\varepsilon = 1$

se l’urto fosse anelastico la variazione percentuale della energia cinetica’ ΔE_c sarebbe pari a :

$$\Delta E = \frac{E_{c_{finale}} - E_{c_{iniziale}}}{E_{c_{iniziale}}}$$

esprimendo ΔE_c in funzione di ε riesce $\Delta E = \varepsilon^2 - 1$

Una bilia, di massa m_1 = 0.503 kg, che scorre su un piano liscio orizzontale con velocità $\vec{v}_1$ costante urta un'altra bilia ferma.

Nell'urto la prima bilia si ferma mentre la seconda, di massa m_2 = 0.934 10^3 g, si mette in moto con velocità v_2 = 22.6 km/h.

Calcolare in km/h il modulo della velocità della prima bilia

1) conversione delle unita' di misura : 0.934E+03 g = 9,34 10^{-1} Kg

2) conversione dell' unita' di misura della velocita' in m/s ?

non ci sono vincoli che agiscono sui corpi quindi potremo imporre la conservazione della quantita' di moto totale

il problema e' unidimensionale e supporemo che il moto avvenga lungo l'asse delle ascisse

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_1 = v_1 \hat{i}$$

quantità di moto totale, componente x, prima e dopo l'urto

prima dell'urto

$$Q_x = m_1 \mathrm{v}_1 + m_2 \mathrm{v}_2$$

dopo l'urto

$$Q_x' = m_1 \mathrm{v}_1' + m_2 \mathrm{v}_2'$$

in questo particolare caso $\mathrm{v}_2 = 0$ e $\mathrm{v}'_1 = 0$ quindi

prima dell'urto

$$Q_x = m_1 \mathrm{v}_1$$

dopo l'urto

$$Q_x' = m_2 \mathrm{v}_2'$$

per la conservazione della quantità di moto totale: $m_1 \mathrm{v}_1 = m_2 \mathrm{v}'_2$

→ $\boldsymbol{v_1 = m_2 v'_2 / m_1}$ velocità prima bilia = 41.9 km/h

ma attenzione: questo non e' un urto perfettamente elastico

perche' non si conserva l'energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} + 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2}$$

$$E_c^{'} = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\,/2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,/2} = 0 + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,/2} \qquad \Rightarrow \qquad E_c^{'} = \frac{1}{2}m_2 v_2^{\,/2}$$

numericamente

v_1 = 42 km/h = (42 10^3) / 3600 m/s = 42/3.6 = 11.7 m/s

v_2 = 22.6 km/h = (22.6 10^3) / 3600 m/s = 22.6 /3.6 = 6.28 m/s

quindi $\frac{1}{2}m_1 v_1^{\,2} = 34.4J$ mentre $\frac{1}{2}m_2 v_2^{\,/2} = 18.4J$

e' chiaro che E_c prima dell'urto e' diversa da E'_c dopo l'urto

l'urto risulterebbe perfettamente elastico solo se $m_1 = m_2$

in quel caso dalla conservazione della quantita' di moto risulterebbe che $v_1 = v_2$

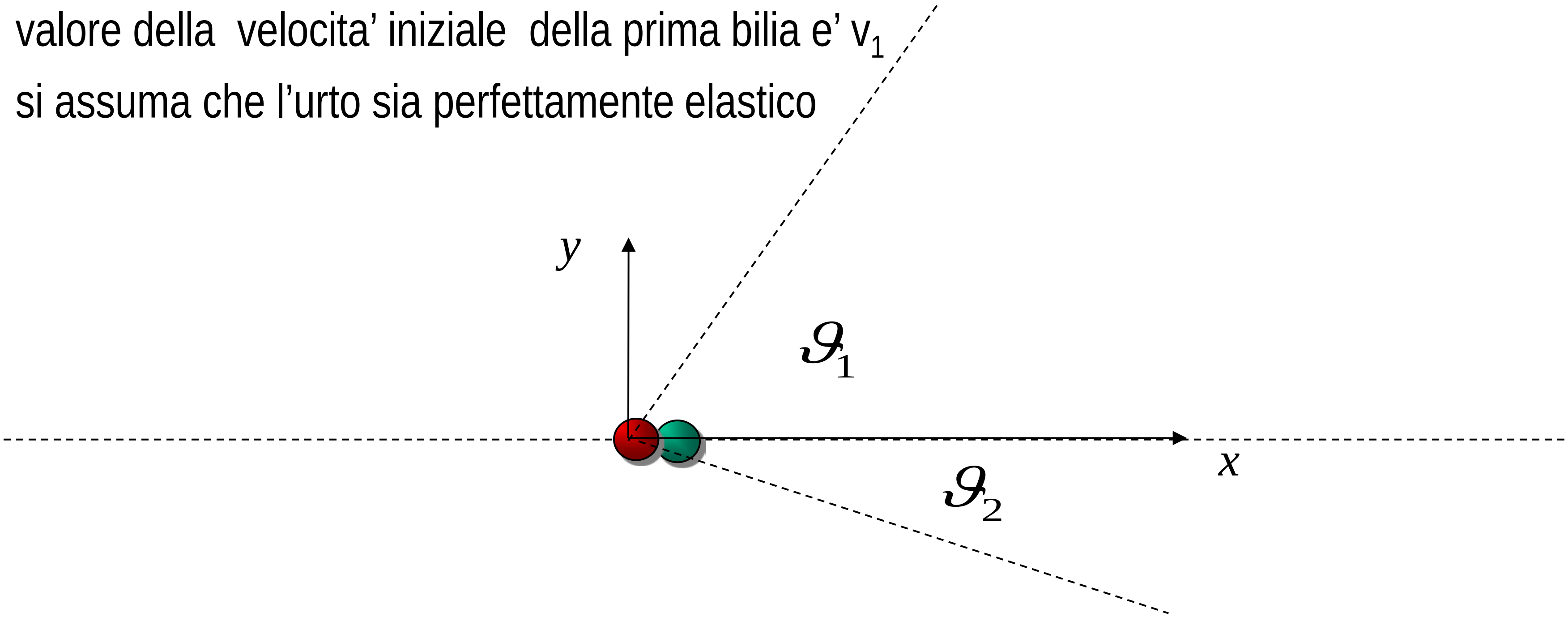
e anche E_c prima dell'urto risulterebbe uguale a E'_c dopo l'urto

Urto elastico nel piano :

una particella di massa m viene lanciata contro un’altra particella identica inizialmente ferma
dopo l’urto la prima particella e’ deviata di 60 gradi rispetto alla direzione iniziale

calcolare in quale direzione rincula la particella colpita e quale e’ la sua velocita’ finale dato che il valore della velocita’ iniziale della prima bilia e’ v_1

si assuma che l’urto sia perfettamente elastico



prima dell’urto

$$Q_x \equiv m_1 \mathrm{v}_1 + m_2 \mathrm{v}_2$$

$$Q_y \equiv 0$$

dopo l’urto

$$Q_x' = m_1 \mathrm{v}_1' \cos\vartheta_1 + m_2 \mathrm{v}_2' \cos\vartheta_2$$

$$Q_y' = m_1 \mathrm{v}_1' sen\vartheta_1 - m_2 \mathrm{v}_2' sen\vartheta_2$$

sfruttando il fatto che le masse sono uguali ossia che $m_1 = m_2 = m$

le precedenti equazioni si possono semplificare nel modo seguente

prima dell'urto

$$Q_x = m\mathrm{v}_1 + mv_2$$

$$Q_y = 0$$

dopo l'urto

$$Q_x' = m\mathrm{v}_1' \cos\vartheta_1 + m\mathrm{v}_2' \cos\vartheta_2$$

$$Q_y' = m\mathrm{v}_1' sen\vartheta_1 - m\mathrm{v}_2' sen\vartheta_2$$

ovvero :

prima dell'urto

$$Q_x = m(\mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2)$$

$$Q_y = 0$$

dopo l'urto

$$Q_x' = m(\mathrm{v}_1' \cos\vartheta_1 + \mathrm{v}_2' \cos\vartheta_2)$$

$$Q_y' = m(\mathrm{v}_1' sen\vartheta_1 - \mathrm{v}_2' sen\vartheta_2)$$

imponendo la condizione iniziale $\mathrm{v}_2 = 0$

prima dell'urto

$$Q_x = m\mathrm{v}_1$$

$$Q_y = 0$$

dopo l'urto

$$Q_x' = m(\mathrm{v}_1' \cos\vartheta_1 + \mathrm{v}_2' \cos\vartheta_2)$$

$$Q_y' = m(\mathrm{v}_1' sen\vartheta_1 - \mathrm{v}_2' sen\vartheta_2)$$

per il principio della conservazione della quantita' di moto totale in un sistema isolato la quantita' di moto totale e' costante, quindi se ne deduce che :

$$m\mathrm{v}_1 = m(\mathrm{v}_1{}' \cos\vartheta_1 + \mathrm{v}_2{}' \cos\vartheta_2)$$

$$0 = m(\mathrm{v}_1{}' sen\vartheta_1 - \mathrm{v}_2{}' sen\vartheta_2)$$

ovvero :

$$\mathrm{v}_1{}' \cos\vartheta_1 + \mathrm{v}_2{}' \cos\vartheta_2 = \mathrm{v}_1$$

$$\mathrm{v}_1{}' sen\vartheta_1 - \mathrm{v}_2{}' sen\vartheta_2 = 0$$

ma ci sono tre incognite da determinare $\mathrm{v}_1{}' \quad \mathrm{v}_2{}' \quad \mathrm{e} \quad \vartheta_2$

per risolvere univocamente il problema occorrera' una terza relazione indipendente dalle prime due dato che l'urto e' perfettamente elastico varra' anche la conservazione della energia cinetica

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^{\;2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\;2} = \frac{1}{2}m_1 v_1^{\prime 2} + \frac{1}{2}m_2 v_2^{\prime 2}$$

imponendo la condizione iniziale $v_2 = 0$ e l'uguaglianza delle masse

si ottiene $$\frac{1}{2}m v_1^{\;2} = \frac{1}{2}m v_1^{\prime 2} + \frac{1}{2}m v_2^{\prime 2}$$

ovvero $$v_1^{\;2} = v_1^{\prime 2} + v_2^{\prime 2}$$

$$\begin{cases} v_1^{\prime}\cos\vartheta_1 + v_2^{\prime}\cos\vartheta_2 = v_1 \\ v_1^{\prime} sen\vartheta_1 - v_2^{\prime} sen\vartheta_2 = 0 \\ v_1^{\;2} = v_1^{\prime 2} + v_2^{\prime 2} \end{cases}$$

si e' ottenuto un sistema di tre equazioni in tre incognite, sistema risolvibile con semplici metodi matematici

Backup Slides