Derivata temporale di un vettore unitario (versore)

la derivata → limite del rapporto incrementale,

nel caso di un generico versore $\hat{u}$

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \hat{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t)}{\Delta t}$$

Attenzione: anche se il ***modulo*** di un versore rimane costante al trascorrere

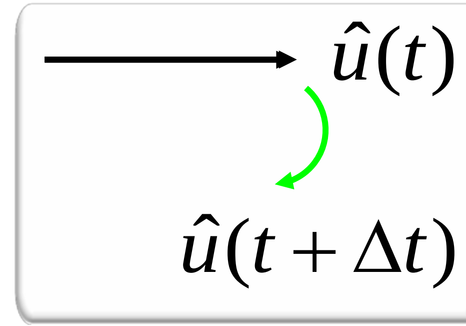
del tempo il versore puo' ugualmente cambiare perche' ne variano

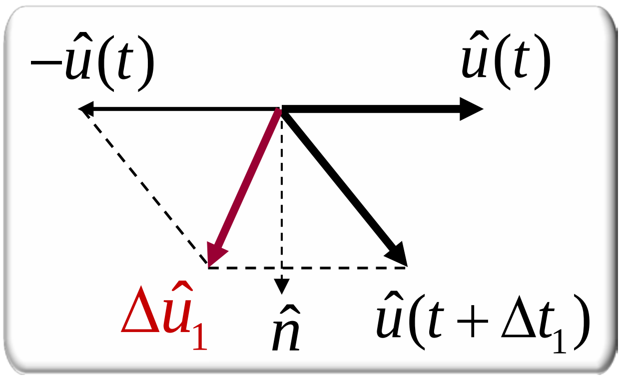
la ***direzione*** ed il ***verso***

se il versore $\hat{u}$ sta ruotando in senso <u>orario</u>

$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t+\Delta t) - \hat{u}(t) = \hat{u}(t+\Delta t) + (-\hat{u}(t))$$

graficamente:





dove $\hat{n} \perp \hat{u}(t)$

via via che $\Delta t \to 0$ $\Delta\hat{u}$ diverra' perpendicolare alla direzione del

versore originale $\hat{u}(t)$ ossia sara' orientato nella direzione del versore $\hat{n}$

dove $\hat{n}$ e' il versore **perpendicolare** ad $\hat{u}$ al tempo ***t*** cio' e' dimostrabile considerando che il prodotto scalare

$$\hat{u}(t) \cdot \hat{u}(t) = \left|\hat{u}(t)\right|^2 = 1 \qquad \forall\ t$$

derivando questa relazione rispetto al tempo: $\dfrac{d}{dt}(\hat{u}(t) \cdot \hat{u}(t)) = 0$

per definizione di derivata del prodotto di due funzioni

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}(t) \cdot \hat{u}(t)) = \frac{d\hat{u}(t)}{dt} \cdot \hat{u}(t) + \hat{u}(t) \cdot \frac{d\hat{u}(t)}{dt} = 2\frac{d\hat{u}(t)}{dt} \cdot \hat{u}(t)$$

dove si e' fatto uso della proprieta' commutativa $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

in conclusione si ha $\quad 2\dfrac{d\hat{u}(t)}{dt}\cdot\hat{u}(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\hat{u}\ (t)}{dt}\cdot\hat{u}\ (t)=0$

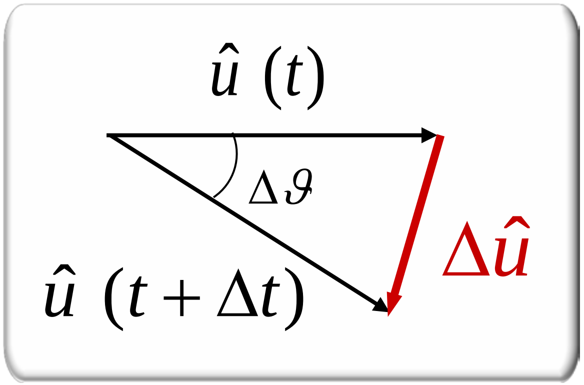
e cio' puo' essere vero ad un tempo qualsiasi solo se il vettore

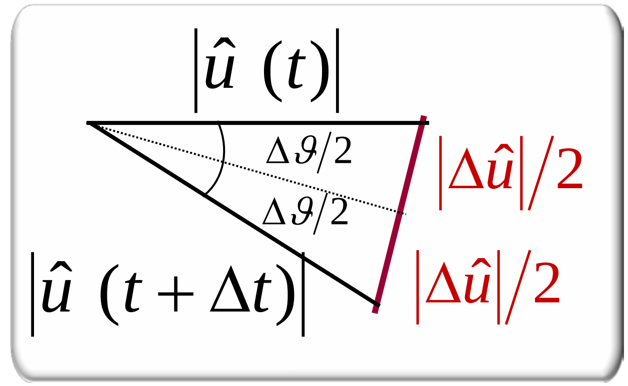
$\dfrac{d\hat{u}(t)}{dt}$ e' <u>sempre perpendicolare</u> a $\hat{u}(t)$

(oppure se il modulo del vettore derivata fosse nullo, ma, se il versore ruota,

la sua derivata temporale e' un vettore di modulo *non nullo*)

modulo del vettore derivata del versore $\hat{u}\ (t)$





$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{2} = |\hat{u}(t)|\sin\frac{\Delta\vartheta}{2} = (1)\ \sin\frac{\Delta\vartheta}{2} = \sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$

per cui $$|\Delta\hat{u}| = 2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}$$

$$\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta\vartheta}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = \left(\frac{2\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\Delta\vartheta}\right)\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right) = \left(\frac{\sin\frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}}\right)\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right)$$

passare al limite per $\Delta t \to 0$ implica anche passare al limite per $\Delta\theta \to 0$

quindi anche per $\Delta\theta/2 \to 0$ (sempre a patto che la velocita' di rotazione sia finita)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \hat{u}|}{\Delta t} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta\vartheta \to 0}} \frac{\sin \frac{\Delta\vartheta}{2}}{\frac{\Delta\vartheta}{2}} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = (1) \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

dunque

- il **modulo** della derivata di un versore e’ dato da $$\left|\frac{d\hat{u}}{dt}\right| = \frac{d\vartheta}{dt}$$

- la **direzione** della derivata del versore e’ nella direzione perpendicolare al versore stesso

- il **verso** della derivata del versore e’ determinato dal senso di rotazione del versore stesso

in conclusione :
$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$$

Nota Bene :

la derivata del versore e’ un vettore che va applicato all’origine del versore $\hat{u}$ al tempo t

Derivata di un vettore

un generico vettore $\vec{r}(t)$ di modulo, direzione e verso variabili nel tempo

puo'essere sempre scritto in termini

del suo modulo $r(t)$ e del suo versore unitario $\hat{u}_r(t)$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = r(t)\hat{u}_r(t)$$

o per semplicita' di notazione $\vec{r} = r\hat{u}_r$

se $\vec{r} = r\hat{u}_r$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$$

Integrale di un vettore

l'operazione di integrazione vettoriale e' definita in termini delle componenti del vettore espresse, per esempio, in un sistema cartesiano

esempio : l'impulso di una forza $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt$

$$\vec{F} = F_x(t)\hat{i} + F_y(t)\hat{j} + F_z(t)\hat{k}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x(t)\hat{i} + F_y(t)\hat{j} + F_z(t)\hat{k})dt$$

$$= \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt$$

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)dt \qquad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)dt \qquad I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z(t)dt$$

l'impulso totale sara'

$$\vec{I} = I_x\hat{i} + I_y\hat{j} + I_z\hat{k}$$

Backup Slides