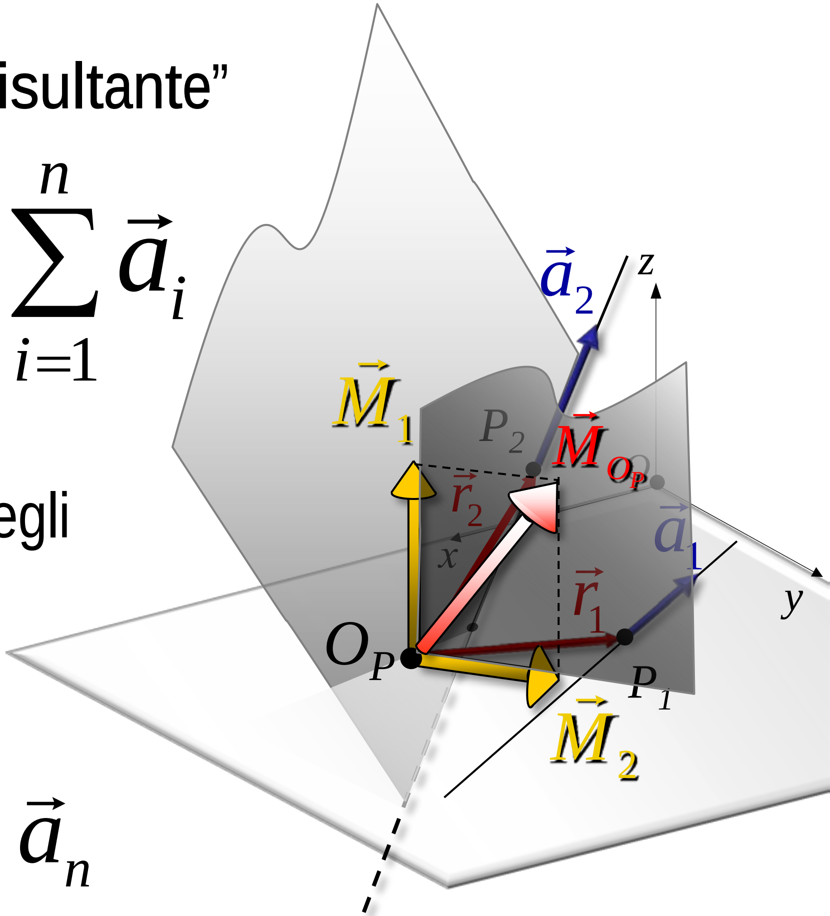
Risultante e momento risultante di un insieme di vettori applicati

dato un insieme di vettori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots\ldots \vec{a}_n$ applicati ai punti $P_1, P_2, \ldots P_n$

dello spazio si definisce vettore risultante o "**risultante**"

$$\vec{R} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots\ldots \vec{a}_n \quad \text{ossia} \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$



si definisce "**momento (polare) risultante**" degli

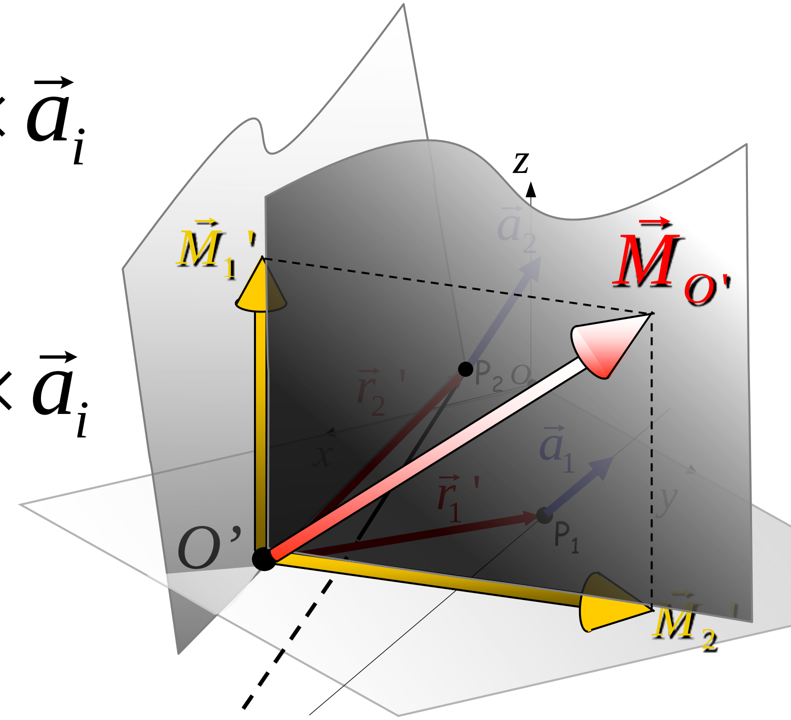
n vettori rispetto al polo O_P

$$\vec{M}_{O_P} = \vec{r}_1 \times \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{a}_2 + \ldots\ldots \vec{r}_n \times \vec{a}_n$$

$$\text{ossia} \quad \vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

il momento risultante degli n vettori <u>dipende</u> dalla scelta del polo

rispetto al polo O’ si avra’ $\vec{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times \vec{a}_i$



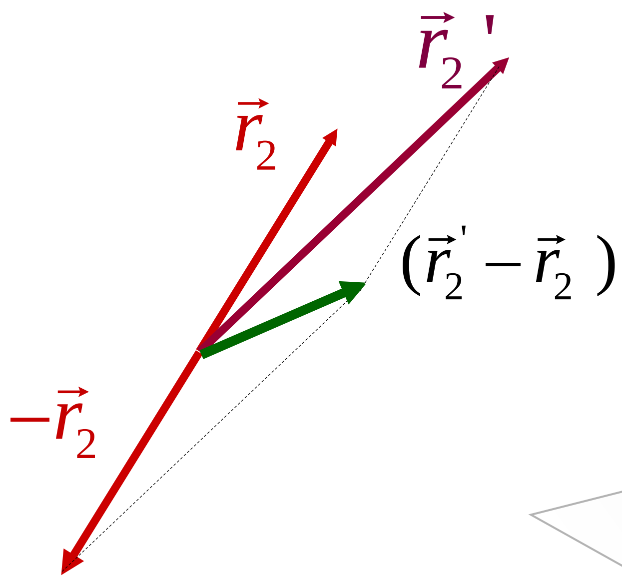
$$\vec{M}_{O'} - \vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times \vec{a}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

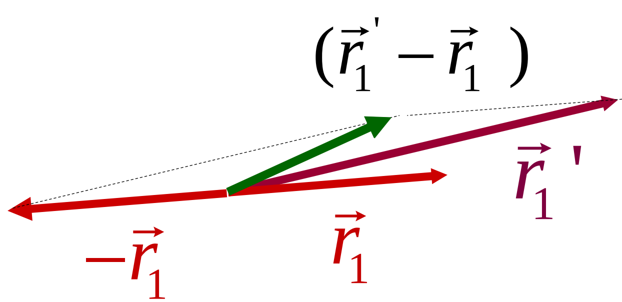
$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i\,' \times \vec{a}_i - \vec{r}_i \times \vec{a}_i)$$

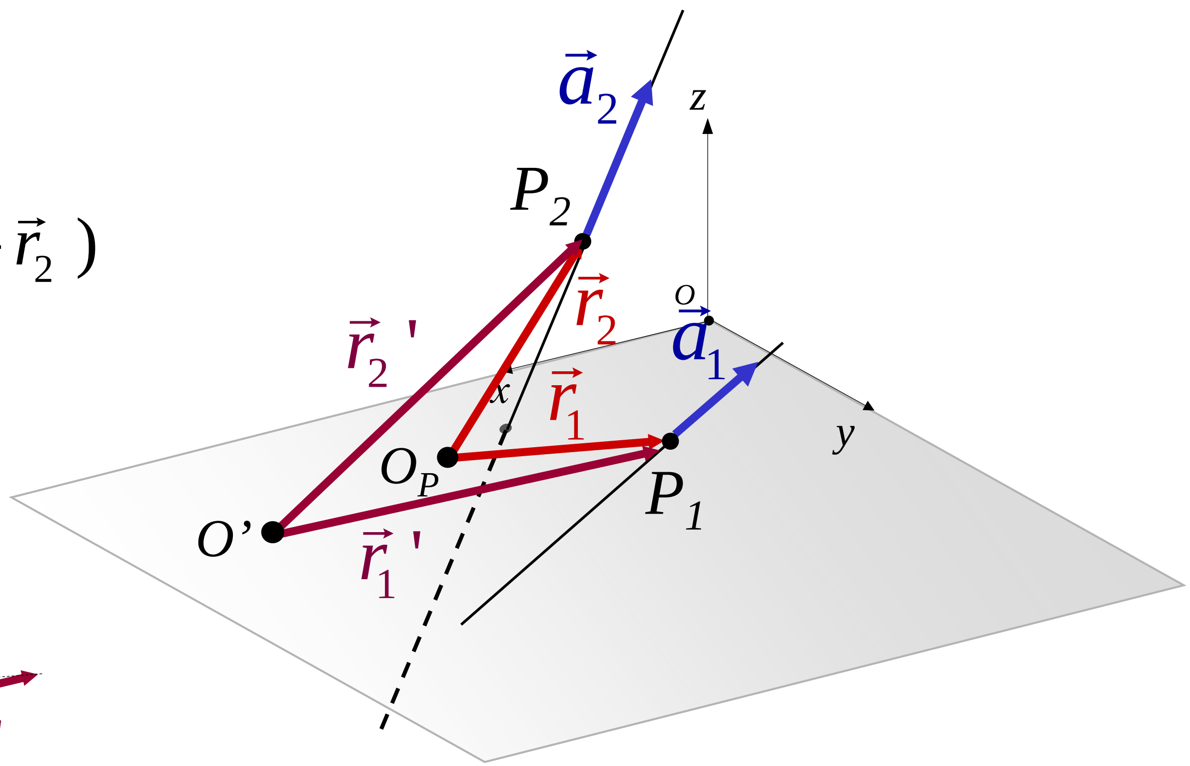
sfruttando la proprieta' distributiva del prodotto vettoriale

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$ si ha che $$\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i{}'\times\vec{a}_i-\vec{r}_i\times\vec{a}_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(\vec{r}_i{}'-\vec{r}_i)\times\vec{a}_i \quad =\sum_{i=1}^{n}\Delta\vec{r}_{O'O_P}\times\vec{a}_i$$







ma $\sum_{i=1}^{n} \Delta\vec{r}_{O'O_P} \times \vec{a}_i = \Delta\vec{r}_{O'O_P} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \Delta\vec{r}_{O'O_P} \times \vec{R}$

in conclusione: $\vec{M}_{O'} - \vec{M}_{O_P} = \Delta\vec{r}_{O'O_P} \times \vec{R}$

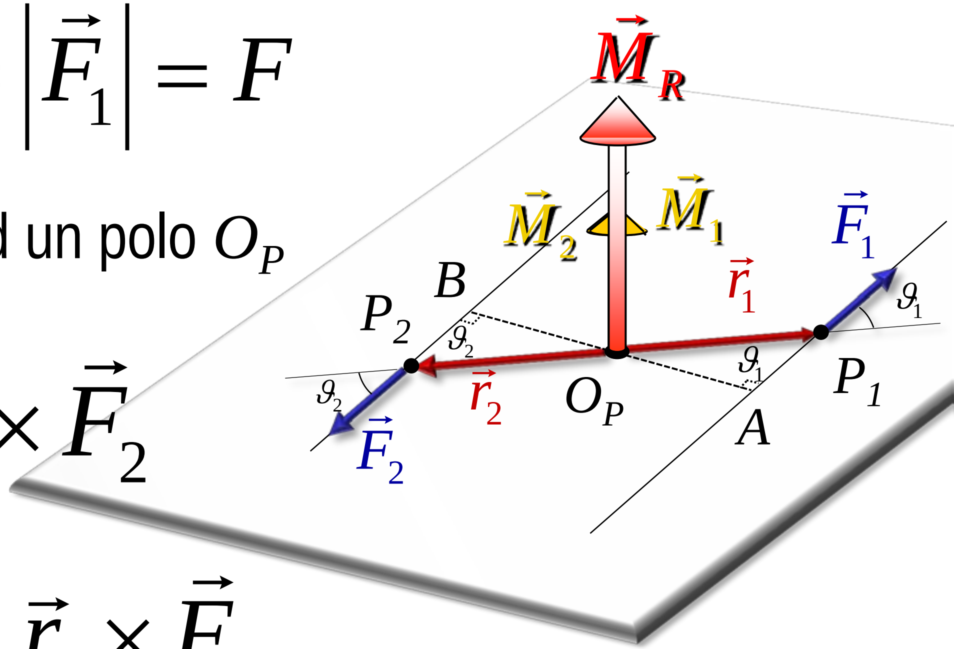
ovvero $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_{O_P} + \Delta\vec{r}_{O'O_P} \times \vec{R}$

- il momento risultante <u>non</u> dipendera' dalla scelta del polo

  solo nel caso che <u>si annulli</u> la risultante $\vec{R}$ degli n vettori

Es. “coppia di forze”: insieme di due forze di uguale modulo e direzione ma di verso opposto, agenti su rette parallele distanziate tra loro del tratto AB

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \qquad \left|\vec{F}_2\right| = \left|\vec{F}_1\right| = F$$



momento della coppia di forze rispetto ad un polo O_P

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \quad \text{e} \quad \vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

$$\left|\vec{M}_1\right| = r_1 sen\vartheta_1 F = OA\ F \quad \text{e} \quad \left|\vec{M}_2\right| = r_2 sen\vartheta_2 F_2 = OB\ F$$

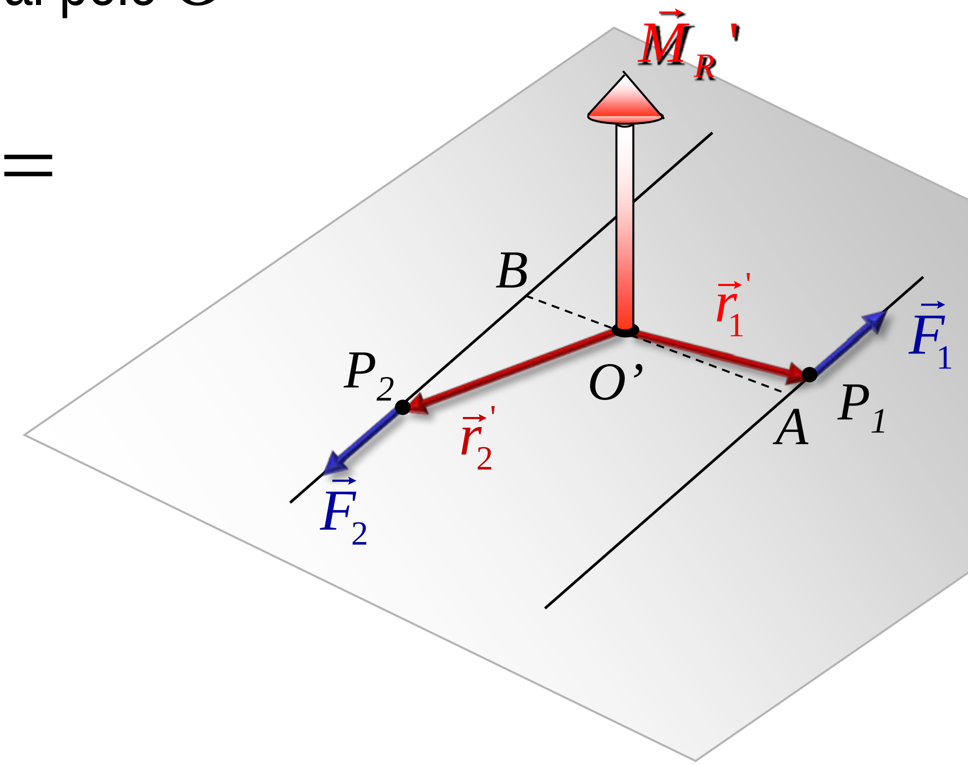
$$\left|\vec{M}_R\right| = OA\ F + OB\ F = (OA + OB)F = AB\ F$$

momento di una coppia di forze rispetto al polo O'

$$\left|\vec{M}_R{}'\right| = O'A\,F + O'B\,F =$$

$$= (O'A + O'B)F$$

$$= AB\,F$$



- modulo, direzione e verso del momento risultante di una coppia di forze <u>non</u> dipendono dalla scelta del polo

Insiemi equivalenti di vettori applicati

due insiemi di vettori applicati che abbiano la **stessa risultante**

e **uguale momento** (polare) **risultante** rispetto allo stesso polo

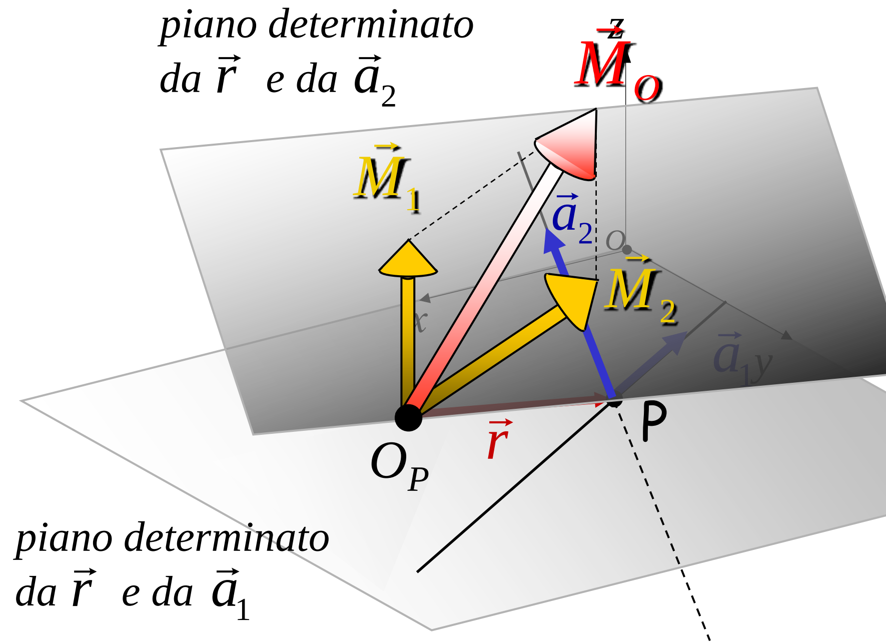
sono detti " *equivalenti* "

➢ Primo caso particolare :

n vettori applicati nel medesimo punto di applicazione P dello spazio

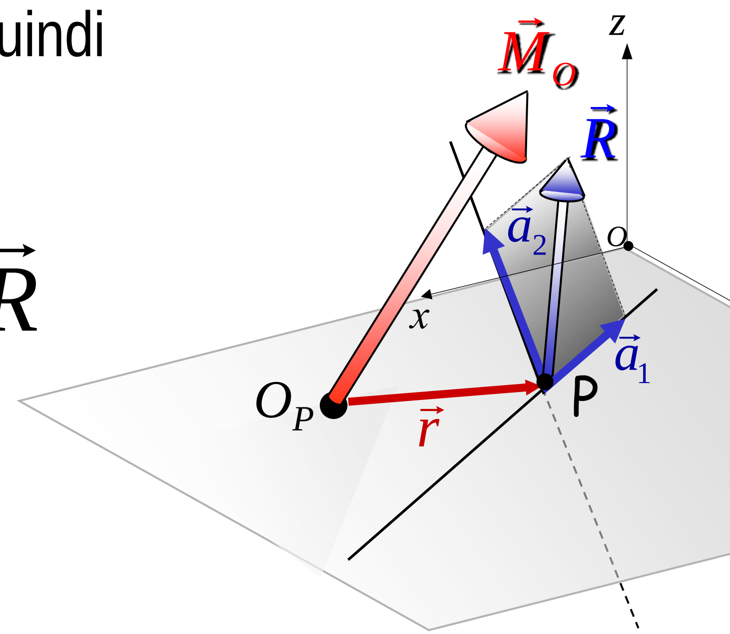
scelto un polo O_P il momento risultante e':

$$\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$



ma se P e' lo stesso $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \ldots = \vec{r}_n \equiv \vec{r}$ quindi

$$\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{a}_i = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \vec{r} \times \vec{R}$$



in conclusione:

un insieme di n vettori applicati ***nel medesimo punto dello spazio*** e' equivalente

ad avere un solo vettore, la risultante $\vec{R}$ degli n vettori , applicata in P

dunque, <u>in questo particolare caso</u> , la sola risultate e' sufficiente per

rappresentare l'insieme di vettori applicati

➢ Secondo caso particolare :

se n vettori ***complanari*** e ***paralleli*** fossero orientati nella direzione individuata dal versore $\hat{u}$ la risultante $\vec{R}$ giacerebbe sullo stesso piano degli n vettori

sempre che non sia nulla, e avrebbe direzione parallela ad $\hat{u}$

- se si assume come polo O un qualsiasi punto

giacente nello stesso piano

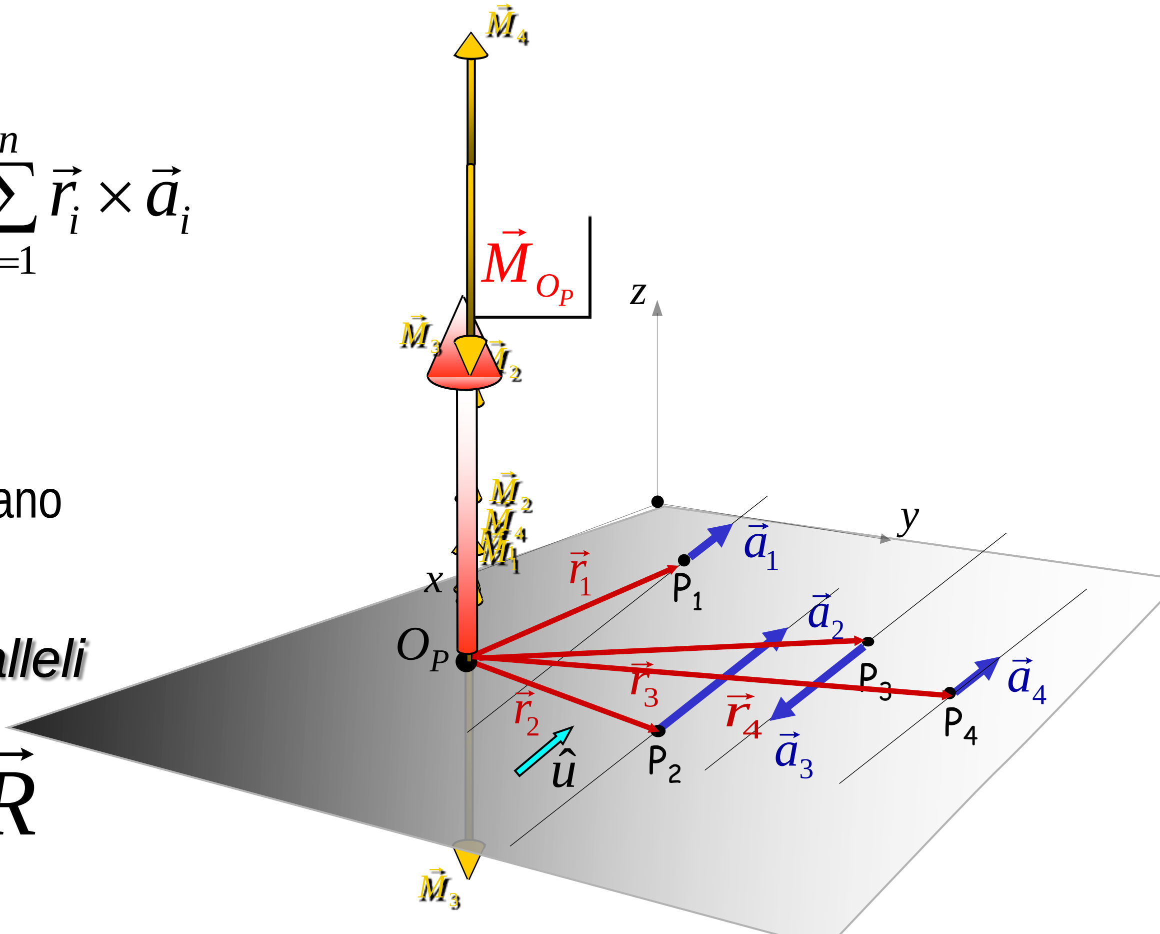
il momento risultante $\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i$

sara' perpendicolare al piano

⇨ deve esistere un punto C del piano

detto ***centro dei vettori paralleli***

tale che $\vec{M}_{O_P} = \vec{r}_C \times \vec{R}$



- in questo particolare caso risulta vi siano un’infinita’ di tali punti

  disposti lungo la retta di equazione $y_C = \frac{R_y}{R_x} x_C$

se la risultante delle forze fosse nulla non sarebbe possibile seguire

questo procedimento

ma attenzione: se la risultante fosse nulla cio’ non implica che anche

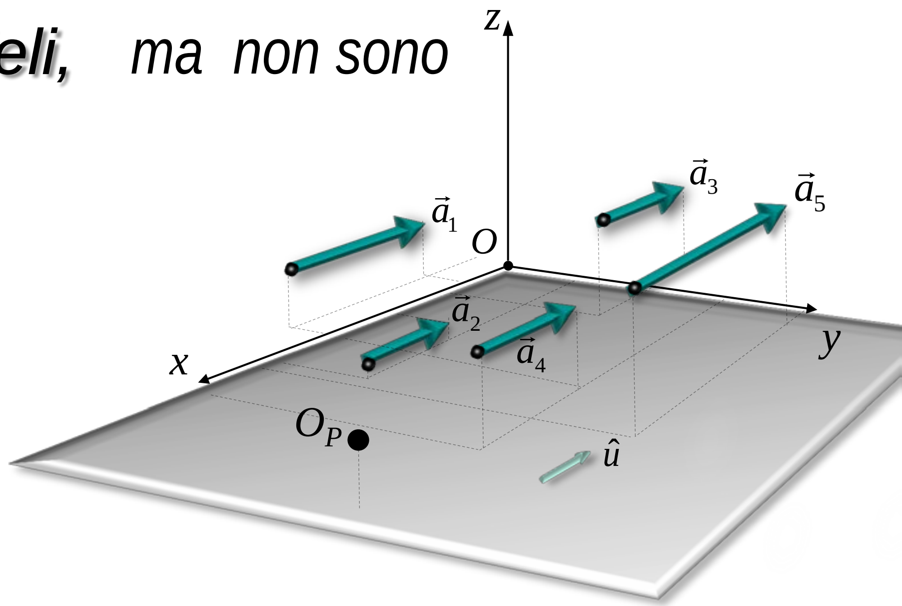
il momento risultate sia nullo

si potrebbe essere in presenza di una coppia di vettori che hanno risultante nulla ma momento risultate non nullo e indipendente dal polo

e‘ chiaro come la sola risultante non sia rappresentativa dell’insieme di vettori applicati

➢ Terzo caso particolare :

se gli n vettori sono ***equiversi*** e ***paralleli,*** *ma non sono*



<u>complanari</u> scelto un polo O_P

il momento risultante e'

$$\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + ... + \vec{M}_n$$

se $\hat{u}$ e' il versore che identifica la direzione comune degli n vettori

$$\vec{a}_i = a_i \hat{u} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = R\hat{u}$$

dove a_i e R sono i moduli dei vettori e della risultante $R = \sum_{i=1}^{n} a_i$

$$\vec{M}_{O_P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times a_i \hat{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{r}_i \times \hat{u} = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{r}_i \right] \times \hat{u}$$

moltiplicando e dividendo per il modulo R della risultante ($R = \left|\vec{R}\right|$)

$$\vec{M}_{O_P} = \frac{R}{R} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{r}_i \right] \times \hat{u} = \frac{1}{R} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{r}_i \right] \times R\hat{u}$$

$$= \frac{1}{R} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{r}_i \right] \times \vec{R}$$ se si pone $$\vec{r}_C = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{r}_i$$

il momento risultante si potra' scrivere come $\vec{M}_{O_P} = \vec{r}_C \times \vec{R}$ dove $\vec{r}_c$ e'

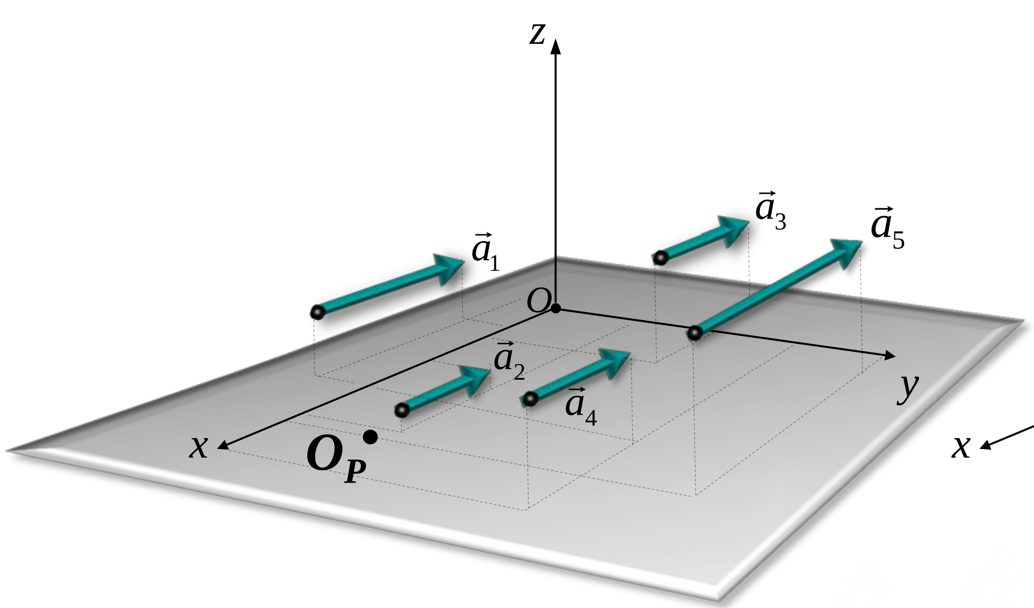
il vettore che collega il polo O_P al punto C detto ***centro dei vettori paralleli*** punto in cui si puo' pensare sia applicata la risultante degli $\boldsymbol{n}$ vettori

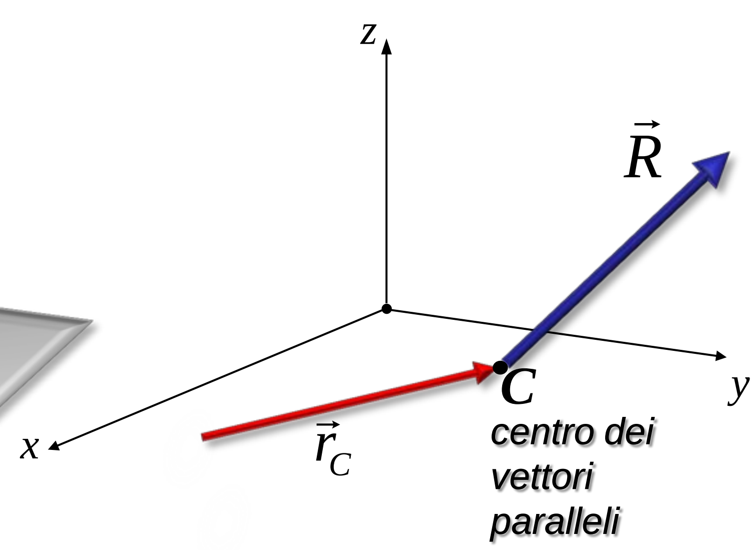
in conclusione :

un insieme di vettori <u>equiversi</u> e <u>paralleli</u> applicati in punti diversi

dello spazio e' a tutti gli effetti equivalente ad un singolo vettore,

la risultante $\vec{R}$ degli $\boldsymbol{n}$ vettori, applicata nel *<u>centro dei vettori paralleli</u>*





il *centro dei vettori paralleli* esiste:

- sempre se i vettori sono paralleli ed equiversi
- se i vettori sono paralleli ma non equiversi, il centro dei vettori paralleli esiste a patto che la risultante non sia nulla

➢ <u>non</u> esiste un unico vettore equivalente ad un insieme di vettori applicati se i vettori non sono tutti paralleli tra loro in generale: dato un qualsiasi insieme di vettori applicati

$\vec{R}$ e $\vec{M}_{O_P}$ non sono perpendicolari tra loro (→ sono indipendenti tra loro)

⇨ un insieme di vettori applicati in generale non e' rappresentabile

dalla sola risultante $\vec{R}$ dei vettori

ma scelto un polo il sistema di vettori puo' sempre essere ridotto ad un

vettore risultante $\vec{R}$ ***con retta di applicazione passante per il polo***

e ad una ''coppia di vettori'' di momento risultante $\vec{M}_{O_P}$

con $\vec{R}$ ***e*** $\vec{M}_{O_P}$ ***indipendenti tra loro***

infatti il momento di $\vec{R}$ rispetto al polo sara' nullo e dato che la risultante di una coppia

di vettori e' sempre nulla, il momento risultante $\vec{M}_{O_P}$ sara' indipendente dal polo prescelto

Backup Slides