Momento della quantita' di moto

si definisce momento della quantita' di moto o " momento angolare " rispetto all'origine del sistema di riferimento inerziale, o ad un generico polo O la grandezza $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{q} \equiv \vec{r} \times m\vec{v}$

il momento angolare di un punto P e' $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ per cui $\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_n)$

ove si sono evidenziate le due componenti del vettore velocita' che appaiono derivando iil vettore posizione rispetto al tempo

e dato che $\vec{v}_r$ e' parallelo ad $\vec{r}$ $\Rightarrow$ $\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_n) = \vec{r} \times m\vec{v}_n$ quindi $\vec{L} = mr\dfrac{d\vartheta}{dt}\vec{r} \times \hat{n}$

da $\vec{L} = mr\dfrac{d\vartheta}{dt}\vec{r} \times \hat{n}$ $\Rightarrow$ $|\vec{L}| = mr^2\dfrac{d\vartheta}{dt}$ ovvero $|\vec{L}| = mr^2\omega$ dove ω e' il modulo della velocita' angolare

- e' evidente come il momento della quantita' di moto sia legato alla rotazione di un punto materiale attorno ad un polo fisso

- tenere presente che il termine mr^2 puo' essere considerato come il " *momento d'inerzia* " di un punto materiale rispetto al polo O anche se il concetto di momento d'inerzia ha origine nei corpi rigidi che sono insiemi di punti materiali

derivando rispetto al tempo il momento angolare di un punto materiale si ha $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \dfrac{d}{dt}(m\vec{v})$

se la massa e' costante $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times m\vec{v}} + \vec{r} \times m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

il differenziale $d\vec{L}$ del momento angolare rispetto al tempo e' per definizione $d\vec{L} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}dt$ e se $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ $\Rightarrow$ $d\vec{L} = \vec{M}dt$

integrando tra l'istante iniziale $t = 0$ e il generico istante finale $t = \tau$ $\displaystyle\int_{\vec{L}_{iniz}}^{\vec{L}_{fin}} d\vec{L} = \int_0^\tau \vec{M}dt$ $\Rightarrow$ $\displaystyle\vec{L}_{fin} - \vec{L}_{iniz} = \int_0^\tau \vec{M}dt$

$\displaystyle\Delta\vec{L} = \int_0^\tau \vec{M}dt$ $\Rightarrow$ per generare una variazione del momento angolare di un punto materiale occorre che per un certo tempo agisca sul punto il momento di una forza

Teorema del momento dell'impulso

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \text{e} \qquad \Delta\vec{L} = \int_0^\tau \vec{M}dt$$

se il tempo τ e' molto breve, al limite infinitesimo,

r rimarra' pressocche' costante durante l'applicazione della forza

e $$\Delta\vec{L} = \int_0^\tau \vec{M}dt = \int_0^\tau \vec{r} \times \vec{F}dt = \vec{r} \times \int_0^\tau \vec{F}dt = \vec{r} \times \vec{I}$$

⇨ $$\Delta\vec{L} = \vec{r} \times \vec{I}$$ teorema del momento dell'impulso

la variazione del momento angolare di un punto materiale e' uguale

al momento dell'impulso applicato al punto

Backup Slides