Velocita' ed accelerazione in coordinate cartesiane

supponiamo che nel punto P dello spazio di coordinate (x,y,z) siano note le componenti cartesiane $(\mathrm{v}_x,\mathrm{v}_y,\mathrm{v}_z)$ della velocita' e quelle (a_x,a_y,a_z) dell'accelerazione

e supponiamo di essere nel caso piu' generale possibile in cui la velocita' e l' accelerazione non sono orientate nella direzione degli assi cartesiani

- per determinare le componenti tangenziale centripeta dell'accelerazione si possono sfruttare le proprieta' del prodotto scalare e vettoriale

la posizione del punto P e' $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ la velocita' e' $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}_x\hat{i} + \mathrm{v}_y\hat{j} + \mathrm{v}_z\hat{k}$ la direzione della velocita' e' individuata dal versore $\hat{t} = \dfrac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \equiv \dfrac{\vec{\mathrm{v}}}{|\vec{\mathrm{v}}|}$

l'accelerazione e' $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ e avra' una componente tangenziale $\vec{a}_t$ nella direzione di $\hat{t}$ ed una componente centripeta $\vec{a}_t$ nella direzione di $\hat{u}_c$

- il <u>prodotto scalare</u> tra $\vec{a}$ e $\hat{t}$ fornira' la proiezione di $\vec{a}$ nella direzione di $\hat{t}$ ossia la componente tangenziale dell'accelerazione $a_t = |\vec{a}_t|$

dato che la velocita' e' sempre tangente alla traiettoria quindi $a_t = \vec{a}\cdot\hat{t}$

- il <u>modulo</u> del <u>prodotto vettoriale</u> tra $\vec{a}$ e $\hat{t}$ $|\vec{a}\times\hat{t}| = |\vec{a}||\hat{t}|\,sen\vartheta = a\,sen\vartheta$ fornira' la proiezione di $\vec{a}$ nella direzione di $\hat{u}_c$

ossia la componente centripeta $a_c = |\vec{a}_c|$ dell'accelerazione

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} \equiv \frac{\vec{\mathrm{v}}}{|\vec{\mathrm{v}}|} \quad \Rightarrow \quad \hat{t} = \frac{\mathrm{v}_x\hat{i} + \mathrm{v}_y\hat{j} + \mathrm{v}_z\hat{k}}{\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}}$$

$$|\vec{a}_t| = \vec{a}\cdot\hat{t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = (\vec{a}\cdot\hat{t})\hat{t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_t = \left(\frac{a_x\mathrm{v}_x + a_y\mathrm{v}_y + a_z\mathrm{v}_z}{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}\right)\left(\mathrm{v}_x\hat{i} + \mathrm{v}_y\hat{j} + \mathrm{v}_z\hat{k}\right)$$

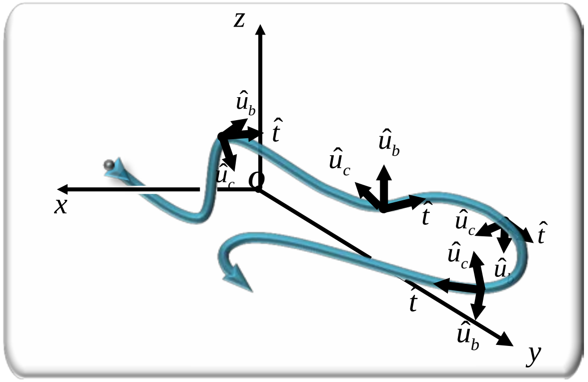
$$|\vec{a}_c| = |\vec{a}\times\hat{t}| = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{v}_x^2 + \mathrm{v}_y^2 + \mathrm{v}_z^2}}\sqrt{(a_y\mathrm{v}_z - a_z\mathrm{v}_y)^2 + (a_z\mathrm{v}_x - a_x\mathrm{v}_z)^2 + (a_x\mathrm{v}_y - a_y\mathrm{v}_x)^2}$$

noto a_c si potra' determinare il raggio di curvatura ρ della traiettoria mentre la direzione ed il verso di $\hat{u}_c$ si potranno determinare dalla $\vec{a}_c = \vec{a} - \vec{a}_t \Rightarrow \hat{u}_c = \dfrac{\vec{a} - \vec{a}_t}{\left|\vec{a} \times \hat{t}\right|}$

Versore binormale

$\hat{u}_b = \hat{t} \times \hat{u}_c$ $\hat{u}_b$ $\hat{t}$ e $\hat{u}_c$ costituiscono una terna ortogonale destra, detta intrinseca la '' *terna instrinseca* '' e' un sistema di riferimento cartesiano '' *locale* ''

nel senso che cambia da punto della traiettoria, ed e' determinato dalle sole caratteristiche geometriche di ogni specifica traiettoria



Backup Slides