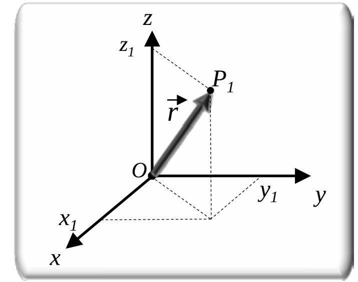
Moto in piu' dimensioni

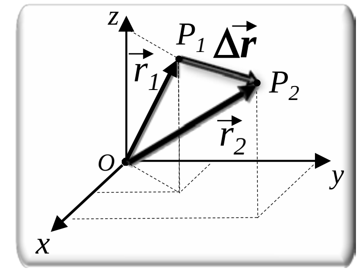


prescelto un sistema di riferimento, ad es. cartesiano ortogonale, *fisso nel tempo*, la posizione di un punto P rispetto all'origine O

del sistema di riferimento viene individuata dal *vettore posizione* $\vec{r}$ in coordinate cartesiane: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ r e' la distanza di P dall'origine O $\Rightarrow$ $\vec{r} = r\hat{u}_r$ (o anche) $\vec{r} = r\hat{r}$

il *vettore posizione* $\vec{r}$ e' sempre spiccato **dall' origine O** **verso il punto P dello spazio**

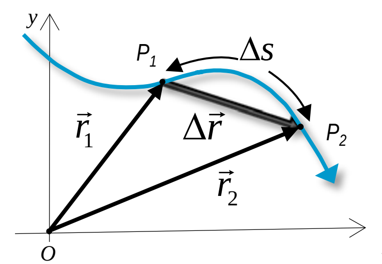


per descrivere una variazione ***finita*** del vettore posizione nel tempo si usa il *vettore spostamento* $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

con $t_2 > t_1$ se al trascorrere del tempo lo spostamento avviene da P_1 a P_2 il vettore $\Delta\vec{r}$ si applica in P_1 e punta verso P_2

si definiscono le grandezze: velocita' istantanea vettoriale $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ accelerazione istantanea vettoriale $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

in effetti se non si utilizzassero grandezze istantanee la descrizione del moto non risulterebbe piu' consona alle esigenze di descrivere con precisione il moto



ad es. : rappresentiamo in blu la *traiettoria* di un generico moto piano che si svolga nel piano xy

$\vec{r}_1$ $(\vec{r}_2)$ = vettore posizione al tempo $t = t_1$ (t_2) $\Rightarrow$ $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\Delta s =$ spazio effettivamente percorso lungo la traiettoria mentre $|\Delta\vec{r}|$ = lunghezza della *corda* sottesa dall'*arco* di lunghezza Δs

e' evidente che $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ ma se gli intervalli di tempo divenissero infinitesimi i punti lungo la traiettoria tenderebbero ad essere sempre piu' ravvicinati tra di loro

e, a patto che la velocita' sia finita, $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$ per $\Delta t \to 0$

- per descrivere una variazione ***infinitesima*** del vettore posizione nel tempo si usa il *vettore spostamento infinitesimo* $d\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta\vec{r}$

  per il vettore $d\vec{r}$ si ha $|d\vec{r}| = ds$

Velocita' vettoriale istantanea

- vettore *velocita' istantanea* $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

modulo del vettore velocita' istantanea

poiche' $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $|d\vec{r}| = ds$ $\Rightarrow$ $|\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$

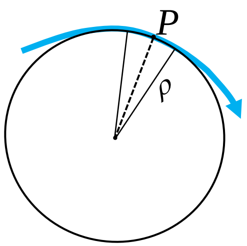
direzione e verso del vettore velocita' istantanea

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e $\vec{r} = r\hat{r}$ $\Rightarrow$ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

- si puo' dimostrare che la direzione di $\vec{v}$ (individuata dal versore $\hat{t}$) risulta sempre ***tangente*** alla traiettoria ossia che si ha sempre $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{t}$

  o anche $\vec{v} = v\hat{t}$ dove $v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$

per capirlo si puo' fare riferimento alle caratteristiche stesse del vettore spostamento infinitesimo $d\vec{r}$ oppure si puo' fare riferimento al "cerchio osculatore"



- data una qualsiasi linea curva nello spazio il *cerchio osculatore* è il cerchio ***tangente*** alla curva in quel punto alla curva in un suo punto P

il cerchio osculatore approssima la curvatura della curva in un intorno infinitesimo del punto P quindi costituisce una approssimazione

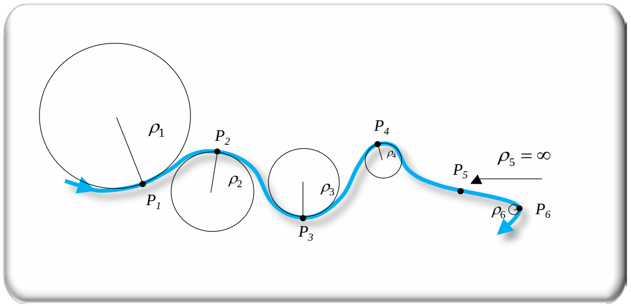
migliore alla curva in P (approssimazione del secondo ordine) di quella fornita dalla retta tangente alla curva in P (approssimazione del primo ordine)

una qualsiasi curva puo' essere pensata come se costituita da una infinita successione di archi di circonferenza

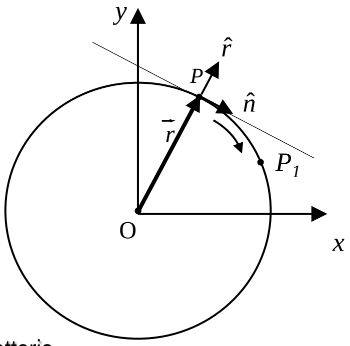
infinitesimi di raggio, punto per punto, pari al raggio ρ del cerchio osculatore in quel punto

il raggio ρ del cerchio osculatore diviene infinito se la linea è una retta

e viceversa tende a zero all'aumentare della curvatura della linea



$\vec{r} = r\hat{r}$ e' il vettore spiccato dal centro della circonferenza verso il generico punto P $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{r} + r\dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

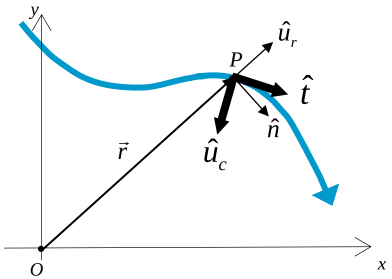


ma essendo la traiettoria <u>circolare</u> $|\vec{r}| = r = cost$ quindi $\dfrac{dr}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = r\dfrac{d\vartheta}{dt}\hat{n}$

ma in un qualsiasi cerchio il raggio che congiunge il centro del cerchio ad un qualunque punto P sulla circonferenza e' sempre perpendicolare alla retta tangente alla circonferenza in quel punto $\Rightarrow$ lungo una qualsiasi traiettoria <u>circolare</u> il vettore velocita' istantanea $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e' tangente alla traiettoria

Accelerazione vettoriale istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



dato che $\vec{v} = v\hat{t}$ si avra' $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\vartheta}{dt}\hat{u}_c \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_c\,\hat{u}_c$

dove $\hat{t}$ e' il versore tangente alla traiettoria e $\hat{u}_c$ e' il versore perpendicolare a $\hat{t}$

- si definisce *accelerazione tangenziale* $(\vec{a}_t)$ quel componente della accelerazione vettoriale istantanea che determina un cambio del <u>modulo</u> della velocita e potenzialmente anche del verso, ma <u>**non**</u> della **direzione** della velocita

- si definisce *accelerazione centripeta* $(\vec{a}_c)$ quel componente della accelerazione vettoriale istantanea che determina un cambio della <u>direzione</u> della velocita, e potenzialmente anche del verso, ma <u>non</u> del **modulo** della velocita

Backup Slides