Teorema di Huygens Steiner

Il momento d'inerzia di un corpo rigido di massa totale M calcolato rispetto

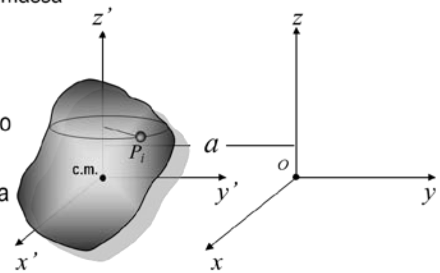
ad un asse che si trova a distanza a dal centro di massa

e' dato da $\quad I_Z = I_C + Ma^2 \quad$ dove

$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ e I_C e' il momento d'inerzia calcolato

rispetto ad un asse passante per il centro di massa

del corpo e parallelo al primo



prendiamo due assi paralleli z' e z, a distanza a tra loro

supponiamo che l'asse z' passi per il centro di massa del corpo

la relazione tra le coordinate nei due sistemi con centro in O e centro nel centro di massa e'

$$x = x' \qquad y = y' - a \qquad z = z'$$

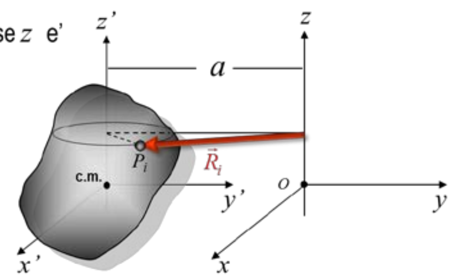
la distanza R_i dell' i-esimo punto P_i rispetto all'asse z e'

$$R_i = \left|\vec{R}_i\right| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$$ percio'

il momento d'inerzia dell' i-esimo punto P_i

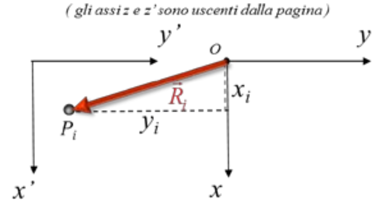
calcolato rispetto all'asse z sara'

$$m_i(x_i^2 + y_i^2)$$



vista dall'alto

(gli assi z e z' sono uscenti dalla pagina)



e il momento d'inerzia totale, rispetto all'asse z, sara'

$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + (y_i' - a)^2)$$

$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2 + a^2 - 2ay_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + \sum_{i=1}^{n} m_i a^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i(2ay_i')$$

$$= I_C + a^2\sum_{i=1}^{n} m_i - 2a\sum_{i=1}^{n} m_i y_i'$$

per definizione di centro di massa: $\quad y'_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i'}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i'}{M} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i y_i' = My'_{CM}$

ma la sommatoria $\sum_{i=1}^{n} m_i y_i'$ e' nulla in quanto y'_{CM} fornisce la coordinata

del centro di massa calcolata nel sistema del centro di massa stesso

in conclusione $\quad I_Z = I_C + Ma^2 \quad$ **teorema di Huygens-Steiner**

Backup Slides