Assi principali d'inerzia di un corpo rigido

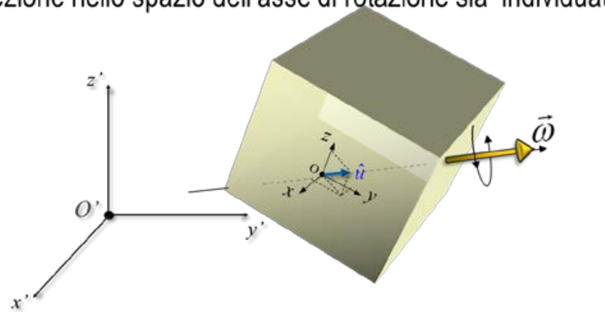
scelto un punto qualunque O di un corpo rigido scegliamo un sistema

di riferimento cartesiano solidale al corpo rigido con origine in O

e con i tre assi x, y, z orientati arbitrariamente ipotizziamo che il corpo stia

ruotando attorno ad un asse di rotazione qualsiasi ma passante per O

la direzione nello spazio dell'asse di rotazione sia individuata dal versore $\hat{u}$



un qualsiasi vettore e quindi anche qualsiasi versore puo'essere scomposto

in componenti cartesiani proiettandolo lungo gli assi per il versore $\hat{u}$ si ha

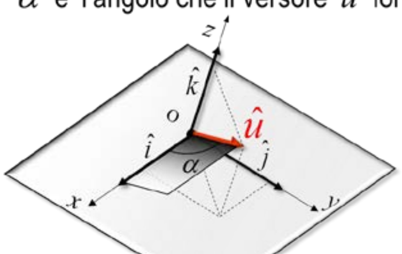
$\hat{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ dove $\alpha\,\beta\,\gamma$, i *coseni direttori*, sono le componenti

di $\hat{u}$ rispetto ai tre assi di riferimento x, y, z

infatti $\hat{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$

dove $u_x = \hat{u}\cdot\hat{i} = 1\cdot 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$ quindi

α e' l'angolo che il versore $\hat{u}$ forma con il versore $\hat{i}$ nel piano definito



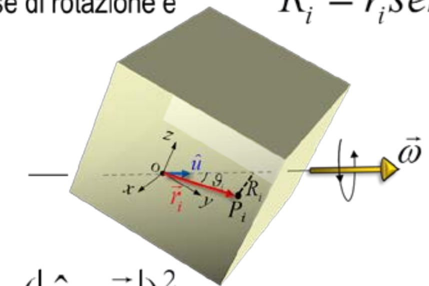
dalle direzioni nello spazio dei due versori

e analogamente per gli altri angoli

la posizione di qualsiasi punto P_i del corpo rispetto ad O e' definita dal

vettore posizione $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$ e la distanza

del punto P_i dall'asse di rotazione e' $R_i = r_i sen\vartheta_i = \left|\hat{u}\times\vec{r}_i\right|$



$\Rightarrow \quad m_i R_i^2 = m_i\left(\left|\hat{u}\times\vec{r}_i\right|\right)^2$

se $\hat{u} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$ e $\vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k}$

$$\hat{u}\times\vec{r}_i = (\beta z_i - \gamma y_i)\hat{i} + (\gamma x_i - \alpha z_i)\hat{j} + (\beta x_i - \alpha y_i)\hat{k}$$

quadrando $\hat{u}\times\vec{r}_i$ si otterra' $m_i R_i^2$ ossia il "*momento di inerzia*" del

punto materiale P_i rispetto all'asse di rotazione $\hat{u}$

per ottenere il momento d'inerzia del corpo rigido occorrera' sommare su

tutti i punti costituenti il corpo

quadrando $\hat{u} \times \vec{r}_i$ e sommando su tutti i punti del corpo rigido si ha

$$I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$$

dove $I_{xx} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$ e' il momento d'inerzia <u>rispetto all'asse x</u>

$I_{yy} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$ e' momento d'inerzia <u>rispetto all'asse y</u>

$I_{zz} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$ e' il momento d'inerzia <u>rispetto all'asse z</u>

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i \qquad I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i \qquad I_{zx} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

sono i **"prodotti d'inerzia"**

sull'asse di rotazione sara' sempre possibile trovare un punto

di coordinate $P(X, Y, Z)$ che disti $d = \dfrac{1}{\sqrt{I}}$ da O

le coordinate X, Y, Z di questo punto saranno

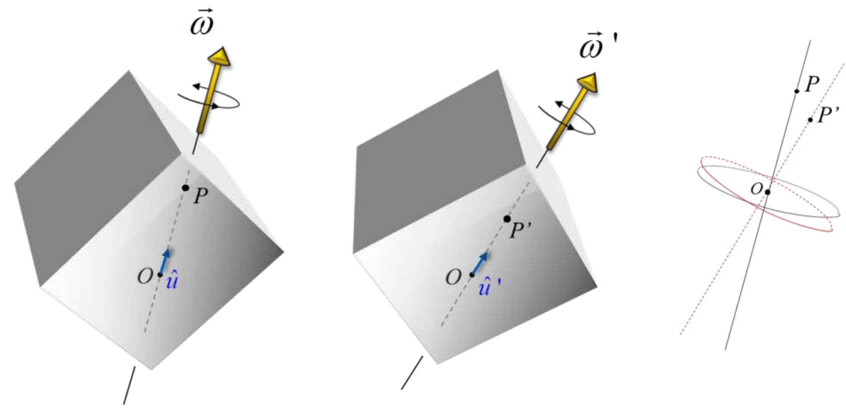
$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I}} \qquad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I}} \qquad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

se l'estremo del versore $\hat{u}$ che ha modulo unitario (→ dista uno da O)

ha coordinate α, β, γ un punto che disti d da O avra' coordinate αd, βd, γd

ossia $\dfrac{\alpha}{\sqrt{I}}$ etc.

se si facesse ruotare il corpo attorno ad un altro asse, ma sempre passante per O rispetto a prima il corpo avrebbe un nuovo momento d'inerzia I', ma si potrebbe comunque trovare sul nuovo asse un punto P' che disti $d = \dfrac{1}{\sqrt{I'}}$ da O



qual'e' il *"luogo"* di questi punti ?

dividendo la $I = I_{xx}\alpha^2 + I_{yy}\beta^2 + I_{zz}\gamma^2 - 2I_{xy}\alpha\beta - 2I_{yz}\beta\gamma - 2I_{zx}\gamma\alpha$

per il momento d'inerzia I si ha

$$1 = I_{xx}\frac{\alpha^2}{I} + I_{yy}\frac{\beta^2}{I} + I_{zz}\frac{\gamma^2}{I} - 2I_{xy}\frac{\alpha\beta}{I} - 2I_{yz}\frac{\beta\gamma}{I} - 2I_{zx}\frac{\gamma\alpha}{I}$$

ossia $I_{xx}X^2 + I_{yy}Y^2 + I_{zz}Z^2 - 2I_{xy}XY - 2I_{yz}YZ - 2I_{zx}ZX = 1$

questa e' l'equazione a cui devono soddisfare le coordinate di un qualsiasi punto

che disti $\dfrac{1}{\sqrt{I}}$ dall'origine O dove I e' il momento d'inerzia del corpo

rispetto all'asse di rotazione definito dai punti O e P

l'insieme dei punti (il "luogo dei punti") che soddisfano questa relazione

e' una superficie elissoidale con centro in O detta *" **elissoide di inerzia** "*

del corpo rigido rispetto al punto O

questo e' vero <u>qualunque</u> sia la distribuzione di massa del corpo

e comunque si scelga l'origine O "*teorema di Poinsot*" :

l'elissoide d'inerzia e' fisso rispetto al corpo e non dipende dalla scelta del sistema di riferimento, ma solo da $\boldsymbol{O}$

quindi e' sempre possibile determinare l'elissoide d'inerzia di un corpo rigido

e il momento d' inerzia del corpo rispetto a <u>qualsiasi</u> asse di rotazione

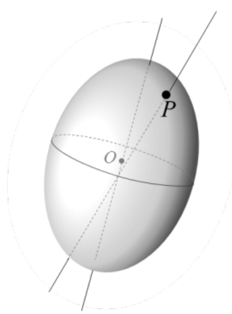
passante per il centro dell'elissoide si potra' ottenere

calcolando la distanza tra O

e il punto geometrico P di intersezione

dell'asse con l'elissoide,

infatti la distanza OP vale $\dfrac{1}{\sqrt{I}}$

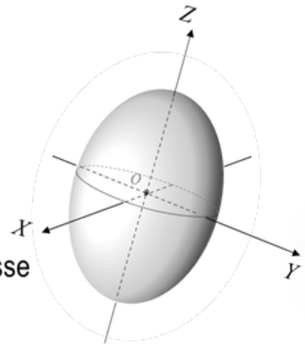


nell' elissoide di inerzia vi sono sempre

un diametro <u>massimo</u> ed uno <u>minimo</u>,

gli assi orientati nella direzione di questi due diametri

sono perpendicolari tra loro e insieme ad un terzo asse



perpendicolare ad entrambi formano gli assi dell'elissoide d'inerzia

del corpo rigido detti *" assi principali d'inerzia "*

se si scegliessero gli assi dell'elissoide come assi $x, y, z,$ solidali al corpo

l'equazione a cui devono soddisfare i punti che distano $\dfrac{1}{\sqrt{I}}$ da O

si semplificherebbe in $I_x X^2 + I_y Y^2 + I_z Z^2 = 1$

dove I_x I_y e I_z sono i momenti d'inerzia del corpo rispetto agli assi dell'elissoide

ossia agli assi principali d'inerzia

I_x, I_y e I_z sono i " *momenti principali d'inerzia*" se il punto O coincide con il centro di massa si parla

di "*elissoide centrale d'inerzia*" e di "*assi centrali d'inerzia*"

gli assi centrali di inerzia sono sempre **almeno** tre

ma possono essere di piu' se il corpo e' dotato di proprieta' di simmetria

→ se l'elissoide divenisse una superficie sferica

qualsiasi asse passante per O

sarebbe un asse centrale d'inerzia

➢ Nota bene :

→ l' equazione che definisce l'elissoide d'inerzia *non* dipende soltanto dalla forma del corpo rigido, ma anche dalla distribuzione delle masse al suo interno

→ l'elissoide d'inerzia e' una forma geometrica che si puo' considerare "associata" al corpo rigido perche' ne specifica le caratteristiche dal punto di vista delle rotazioni intorno ad un asse

➢ **ma l'elissoide d'inerzia *non* e' una porzione di corpo rigido di forma elissoidale** e' una superficie "fittizia" definita da una equazione matematica (un po' come per la superficie "gaussiana" con la differenza che nel teorema di Gauss la superficie puo' essere di forma qualsiasi)

per definizione $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

del tutto in generale $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$

esplicitando le componenti cartesiane della $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

si ha

$$L_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$L_y = -I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$L_z = -I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

$$\vec{L} = (I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z)\hat{i} + (-I_{xy}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z)\hat{j} + (-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\hat{k}$$

dato che $\vec{\omega} = \omega_x \hat{i} + \omega_y \hat{j} + \omega_z \hat{k}$ e' evidente che

$\vec{L}$ non e' proporzionale a $\vec{\omega}$

la matrice $\begin{vmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix}$ e' la "*matrice d'inerzia*"

se scegliessimo come assi di riferimento gli assi principali d'inerzia la

matrice d'inerzia diagonalizzerebbe e la relazione tra $\vec{L}$ e $\vec{\omega}$ si semplificherebbe

nella → $\vec{L} = I_x \omega_x \hat{i} + I_y \omega_y \hat{j} + I_z \omega_z \hat{k}$

Ricapitolando:

per ogni corpo rigido qualunque sia la sua forma geometrica e qualunque sia

la sua distribuzione di massa esisteranno sempre tre (o piu') assi

passanti per un qualsiasi punto fisso O del corpo

questi assi sono perpendicolari tra di loro e hanno la peculiarita' che

quando il corpo ruota rispetto ad uno di essi $\vec{L}$ e' parallelo ad $\vec{\omega}$

→ nel caso di corpi rotanti in teoria, e' sempre possibile,

realizzare una configurazione che minimizzi, o al limite azzeri,

le sollecitazioni dinamiche sui supporti dell'asse di rotazione

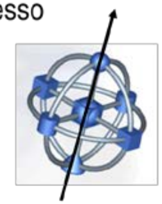
e tuttavia non sempre sara' possibile realizzare questa condizione

in pratica anche se lo sarebbe sempre in teoria

dunque sara' necessaria una accurata progettazione

Giroscopio

$\vec{\omega}$



se un corpo rigido , sottoposto alla sola forza peso, venisse messo

in rotazione rispetto ad un asse centrale d'inerzia,

il centro di massa del corpo sarebbe sull'asse di rotazione,

e dato che la forza peso si puo' pensare esercitata sul centro di massa del corpo

non avrebbe momento risultante rispetto al centro di massa stesso percio'

non ci sarebbe nessun momento esterno che faccia cambiare direzione all'asse

➢ quindi l'asse di rotazione conserverebbe invariata la sua direzione nello spazio

→ principio di funzionamento dei giroscopi

Backup Slides