Coppia di forze e terzo principio della dinamica:

per una qualsiasi ***coppia di forze*** il momento risultante di una coppia di forze e' sempre lo stesso indipendentemente dalla scelta del polo

nel caso le due forze giacciano sulla stessa retta di azione (coppia di forze a braccio nullo) il momento risultante sara' nullo

⇨ una coppia di forze a braccio nullo ha sempre momento totale nullo rispetto a qualsiasi polo

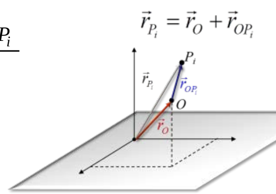
secondo il terzo principio della dinamica le forze interne

- hanno sempre risultante nulla
- costituiscono sempre una coppia di forze a braccio nullo

→ ad ogni istante il momento risultante delle <u>forze interne</u> rispetto ad un qualunque polo e' nullo ⇨ $\vec{M}^{I}_{R_O} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{I} = 0$

in sintesi : in un qualsiasi sistema di punti materiali su cui agiscano simultaneamente forze <u>interne</u> ed <u>esterne</u> si ha sempre $\vec{R}^{i} = 0$ $\quad \vec{M}^{I}_{R_O} = 0$ $\quad \vec{R}^{E} = \dfrac{d\vec{Q}}{dt}$

Polo mobile



se il polo O e' in moto con velocita' $\vec{\mathrm{v}}_O$ rispetto al sistema inerziale fisso dato che' $\vec{r}_{P_i} = \vec{r}_O + \vec{r}_{OP_i}$ → $\vec{\mathrm{v}}_{P_i} = \dfrac{d\vec{r}_{P_i}}{dt} = \dfrac{d\vec{r}_O}{dt} + \dfrac{d\vec{r}_{OP_i}}{dt} = \vec{\mathrm{v}}_O + \dfrac{d\vec{r}_{OP_i}}{dt}$

⇨ $\dfrac{d\vec{r}_{OP_i}}{dt} = \vec{\mathrm{v}}_{P_i} - \vec{\mathrm{v}}_O$ la derivata rispetto al tempo di un vettore che abbia entrambi gli estremi mobilii e' uguale alla differenza delle velocita' dei due estremi del vettore

il momento angolare del punto P_i rispetto al polo mobile O sara' $\vec{L}_i = \vec{r}_{O_{P_i}} \times m_{P_i} \vec{\mathrm{v}}_{O_{P_i}}$ per semplificare la notazione poniamo $\vec{r}_{OP_i} = \vec{r}_i$ $\quad m_{P_i} = m_i$ e $\vec{\mathrm{v}}_{P_i} = \vec{\mathrm{v}}_i$

quindi $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$ e il momento angolare <u>totale</u> $\vec{L}$ rispetto al polo mobile O sara' $\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$

derivando rispetto al tempo $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d}{dt}\vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \dfrac{d(m_i \vec{\mathrm{v}}_i)}{dt}$ se la massa dei punti P_i e' costante nel tempo

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i +$ $\quad m_i \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i$ nel sistema inerziale → $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt} = \vec{R}_i = \vec{R}_i^{E} + \vec{R}_i^{I}$ e si era trovato che $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \dfrac{d\vec{r}_{OP_i}}{dt} = \vec{\mathrm{v}}_{P_i} - \vec{\mathrm{v}}_O$ per cui la

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \dfrac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt}$ diviene $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{\mathrm{v}}_{P_i} - \vec{\mathrm{v}}_O) \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (\vec{R}_i^{E} + \vec{R}_i^{I})$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{v}}_{P_i} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{v}}_O \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{E} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{I}$$

ma $\vec{\mathrm{v}}_{P_i} \equiv \vec{\mathrm{v}}_i$ → $\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{v}}_{P_i} \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{v}}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i = 0$

e $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{I} = 0$ dato che il momento risultante delle forze interne e' sempre nullo quindi $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{v}}_O \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i^{E}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i^E = -\vec{v}_O \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i + \vec{M}^E = -\vec{v}_O \times M\vec{v}_{CM} + \vec{M}^E$$

dove si e' utilizzata la definizione di velocita' del C.M. $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{M}$

e $\vec{M}^E = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{R}_i^E$ e' il momento totale risultante delle forze esterne agenti sul sistema di punti rispetto ad O

in conclusione $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E - \vec{v}_O \times M\vec{v}_{CM}$ (polo O mobile rispetto al sistema inerziale) se il secondo termine fosse nullo $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ **seconda equazione cardinale**

Seconda equazione cardinale: se il termine $-\vec{v}_O \times M\vec{v}_{CM}$ fosse nullo → $\vec{M}^E = \frac{d\vec{L}}{dt}$ → ad ogni stante la risultante de momenti di tutte le forze esterne rispetto ad un qualsiasi polo e' uguale alla derivata temporale del momento angolare totale

la seconda equazione cardinale e' l'estensione del terzo principio della dinamica a sistemi composti di piu' punti materiali

se il sistema di punti e' isolato, ossia se sul sistema non si esercitano forze esterne, → momento totale delle forze esterne e' nullo → conservazione del momento angolare totale

Backup Slides