

Esercizio

Un punto materiale P si muove sul piano xy con accelerazione

$$\vec{a}(t) = (k_2 \cos \omega t) \hat{j} \quad \text{sapendo che le condizioni iniziali del moto}$$

sono espresse dalle relazioni

$$x(t=0) = x_0 = 0 \quad \text{e} \quad y(t=0) = y_0 = -\frac{k_2}{\omega^2}$$

$$v_x(t=0) = v_{x_0} = k_1 \quad \text{e} \quad v_y(t=0) = v_{y_0} = 0$$

determinare:

- 1) l'equazione della traiettoria del punto P
- 2) l'espressione del valore massimo del modulo della velocità

il moto avviene nel piano xy quindi in generale si avrà' $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$

ma $\vec{a} = (k_2 \cos \omega t) \hat{j}$ perciò in questo caso particolare si ha

$$a_x = 0 \quad \text{e} \quad a_y = k_2 \cos \omega t$$

moto **rettilineo uniforme** lungo l'asse x e



moto **armonico semplice** lungo l'asse y

i due moti sono indipendenti tra di loro e integrando la $a = \frac{dv}{dt}$

separatamente per il moto lungo x e per quello lungo y per ottenere la velocità

si ha $v_x = c_{v_x}$ e $v_y = \frac{k_2}{\omega} \sin \omega t + c_{v_y}$

imponendo le condizioni iniziali sulla velocita' si ha

$$v_x(0) \equiv v_{x_0} = k_1 \Rightarrow c_{v_x} = k_1 \quad \text{e}$$

$$v_y(0) = \frac{k_2}{\omega} \text{sen} 0 + c_{v_y} = v_{y_0} = 0 \quad \text{ma } \text{sen} 0 = 0 \Rightarrow c_{v_y} = 0$$

$$v_x(t) = k_1$$

dunque

equazioni orarie per v_x e v_y

$$v_y(t) = \frac{k_2}{\omega} \text{sen} \omega t$$

integrando $v_x(t) = k_1$ e $v_y(t) = \frac{k_2}{\omega} \text{sen} \omega t$

si ricavano le equazioni orarie per la posizione

per la $x(t)$ si ottiene $x(t) = k_1 t + c_x \Rightarrow x(0) = k_1 \cdot 0 + c_x$

quindi $c_x = x(0)$ ma $x(0) = x_0 = 0 \Rightarrow c_x = 0$

dunque $x(t) = k_1 t$

per quanto riguarda la $y(t)$ si ha

$$y(t) = -\frac{k_2}{\omega^2} \cos \omega t + c_y \quad \Rightarrow \quad y(0) = -\frac{k_2}{\omega^2} \cos(0) + c_y \quad \text{quindi}$$

$$c_y = y(0) + \frac{k_2}{\omega^2} \quad \text{ma} \quad y_0 = -\frac{k_2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad c_y = -\frac{k_2}{\omega^2} + \frac{k_2}{\omega^2} = 0$$

dunque

$$y(t) = -\frac{k_2}{\omega^2} \cos \omega t$$

$$\vec{a}(t) = (k_2 \cos \omega t) \hat{j}$$

in sintesi:

$$\vec{v}(t) = k_1 \hat{i} + \left(\frac{k_2}{\omega} \sin \omega t \right) \hat{j} \quad \text{equazioni orarie}$$

$$\vec{r}(t) = (k_1 t) \hat{i} - \left(\frac{k_2}{\omega^2} \cos \omega t \right) \hat{j}$$

da $x = k_1 t$ si ricava $t = \frac{x}{k_1}$ che sostituito nella $y = -\frac{k_2}{\omega^2} \cos \omega t$

fornisce y in funzione di x

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{k_2}{\omega^2} \cos \frac{\omega x}{k_1} \quad \text{equazione della traiettoria nel piano } xy$$

il modulo della velocità è dato dall'espressione $v = \sqrt{k_1^2 + \frac{k_2^2}{\omega^2} \sin^2 \omega t}$

e poiché compare il quadrato della funzione seno il valore massimo

si avrà quando il seno assume i valori 1 o -1 e sarà pari a

$$v_{\max} = \sqrt{k_1^2 + \frac{k_2^2}{\omega^2}}$$

Backup Slides