Curve piane

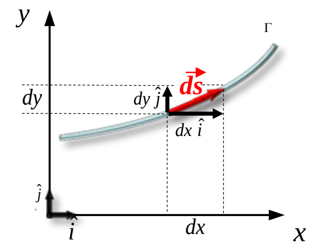
una curva piana, per es. appartenente al piano xy, puo' essere espressa in forma cartesiana $\Rightarrow$ $f(x,y)=0$ $\quad f: I \to R^2$

dove $f(x,y)$ e' una funzione reale continua con derivate parziali continue oppure in forma parametrica $\Rightarrow$ $x = x(t) \quad y = y(t)$

dove $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni reali della variabile reale (parametro) t definito in un dato intervallo $[a,b]$ di R

data una curva Γ giacente nel piano xy se si effettua uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$ lungo Γ $\Rightarrow$ $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$ e $|d\vec{s}| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$

ds e' la " *lunghezza dell'arco elementare* " se la curva ha l'espressone parametrica $x = x(t) \quad y = y(t) \quad con \ \ t \in [a,b]$

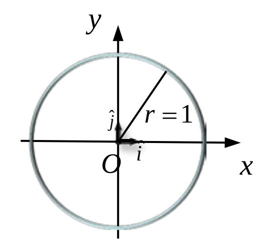


e se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni <u>continue</u> e <u>derivabili</u> $dx = x'(t)dt$ e $dy = y'(t)dt$

$$\Rightarrow \quad ds = \sqrt{(x'(t)dt)^2 + (y'(t)dt)^2} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt$$

- se $x(t)$ e $y(t)$ sono funzioni <u>continue</u> e <u>derivabili</u> la curva e' "*rettificabile*" e la sua ***<u>lunghezza</u>*** nel tratto da a a b è

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

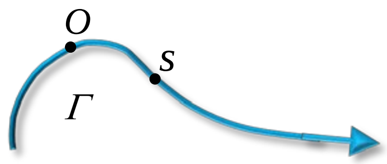


es. circonferenza unitaria : espressione in forma cartesiana $f(x,y)=0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$

espressione in forma parametrica $\begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = cos(t) \\ y = sen(t) \end{matrix} \quad con \ \ t \in [0, 2\pi]$

calcolare la lunghezza della circonferenza $\to$ integrare ds da $t = 0$ a $t = 2\pi$ $\Rightarrow$ $L = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-sen(t))^2 + (cos(t))^2}\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$

Curve piane



Ascissa curvilinea: se $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ rappresenta la curva piana Γ

- fissato un punto O su Γ come origine,
- scelto un verso positivo di percorrenza lungo Γ
- definita un' unita' di misura per la lunghezza

➢ ad ogni punto della curva Γ si associa un numero reale s detto "*ascissa curvilinea*" definito come:

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2}\, dt' \quad per \quad t \neq a \qquad s(t) = 0 \quad per \quad t = a$$

$s(t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco della curva *orientata* Γ nel tratto di curva compreso tra il valore della funzione nel punto di partenza $f(a)$ e il valore della funzione nel generico punto $f(t)$

$s(t)$ e' invertibile, ossia esiste $t = g(s)$ se la curva Γ *e' rappresentata dalla* $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e' equivalente a $f'(s) = f(\,g(s)\,)$ con $f' : [0,L] \rightarrow \mathbb{R}^2$

➢ $f'(s)$ e' **la rappresentazione parametrica della curva orientata Γ espressa in funzione dell'ascissa curvilinea s**

➢ il segno di s, e' positivo se il punto si trova dalla parte del verso positivo rispetto all'origine O, sara' negativo se il punto si trova dalla parte opposta rispetto ad O

attenzione : la differenza tra il valore finale dell'ascissa curvilinea s e quello iniziale <u>non</u> fornisce lo spazio percorso

potrebbe essere nulla anche se il corpo e' in movimento ad es. nel caso di un moto periodico di andata e ritorno

➢ e' il ***modulo*** dell'ascissa curvilinea s a fornire la lunghezza dell'arco di curva rettificato

Curve nello spazio

l'estensione di questi concetti alle curve nello spazio e' immediata

se una curva nello spazio $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita in forma parametica in funzione della variabile (parametro) t dalle tre funzioni

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

$t \in [a,b]$ e' continua e derivabile → e' possibile ''***rettificare***'' la curva

la sua ***lunghezza*** è $L = \int_a^b \left| f'(t) \right| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

e la sua ***ascissa curvilinea*** sara' $s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2 + z'(t')^2}\ dt' \quad per \ \ t \neq a \qquad s(t) = 0 \quad per \ \ t = a$

Esercizio:

la triettoria di un punto nello spazio tridimensionale e' data dalle equazioni $x(t) = 4cos(6t)$ $\quad y(t) = 4sen(6t)$ $\quad z(t) = 3t$

dove t e' il tempo. Se il moto ha inizio al tempo $t = 0$ determinare la lunghezza dell'arco percorso dal punto materiale dopo un tempo $t = 5s$.

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2 + z'(t')^2}\ dt' \qquad \frac{dx}{dt} = x' = -24sen(6t) \qquad \frac{dy}{dt} = y' = 24cos(6t) \qquad \frac{dz}{dt} = z' = 3$$

$$s(t=5) = \int_0^5 \sqrt{576sen^2(6t) + 576cos^2(6t) + 9}\ dt' = \int_0^5 \sqrt{576+9}\ dt' = \int_0^5 24.187\ dt' = 24.187 \int_0^5 dt' = 24.187(5-0) = 120.93$$

Backup Slides