

# Infinitesimi

e' detto "*infinitesimo*" una qualsiasi quantita' tendente a zero quando una opportuna variabile tende ad assumere un determinato valore

dati due infinitesimi  $\alpha$  e  $\beta$

- $\alpha$  e  $\beta$  **non** sono paragonabili tra loro se il  $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  non esiste
- $\alpha$  e  $\beta$  sono infinitesimi dello **stesso ordine** se il  $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  esiste, e' finito e ha un valore **non** nullo
- $\beta$  e' infinitesimo di **ordine superiore** rispetto ad  $\alpha$  se il  $\lim \frac{\beta}{\alpha}$  esiste ed ha valore **nullo**

# Funzione reale di una variabile

una funzione reale di una variabile reale  $f$  è una corrispondenza tra

un insieme di numeri reali  $A$ , rappresentato dalla variabile **indipendente**  $x$

e un insieme di numeri reali  $B$ , rappresentato dalla variabile **dipendente**  $y$

$$y = f(x)$$

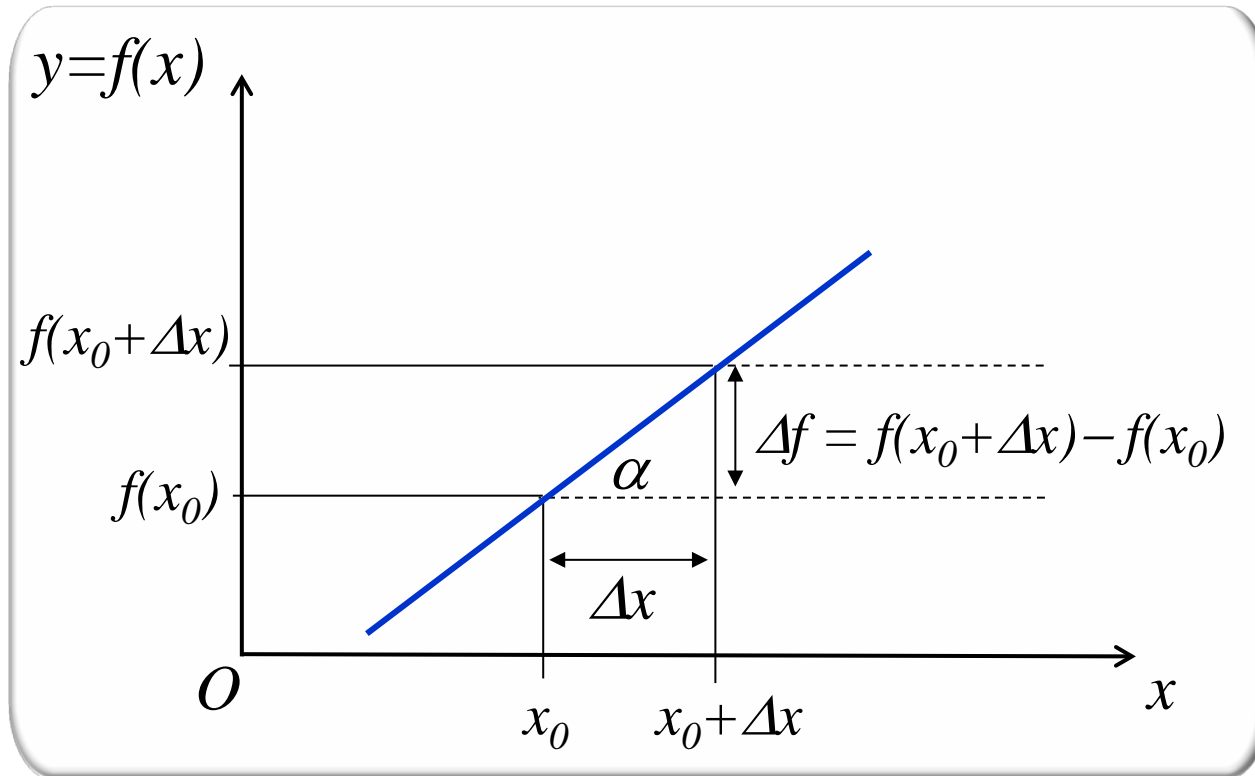
# Derivata di funzione di una variabile

data una funzione reale  $f(x)$  di una variabile  $x$  e' detta derivata  $f'$

della funzione nel punto  $x_0$  il limite per  $\Delta x \rightarrow 0$  del rapporto incrementale

$$f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Dipendenza lineare  $y \equiv f(x) = a + bx$



$$f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \Rightarrow \quad f' = \operatorname{tg} \alpha$$

$\Rightarrow$   ***$f'$  e' il valore del coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto  $x_0$***

data una funzione  $f$  derivabile di una variabile  $x$

- e' detto **differenziale**  $dx$  della **variabile indipendente**  $x$ , un incremento infinitesimo arbitrario non nullo della variabile  $x$
- si chiama **differenziale**  $df$  della **funzione** il prodotto della derivata  $f'(x)$  per il differenziale della  $x$

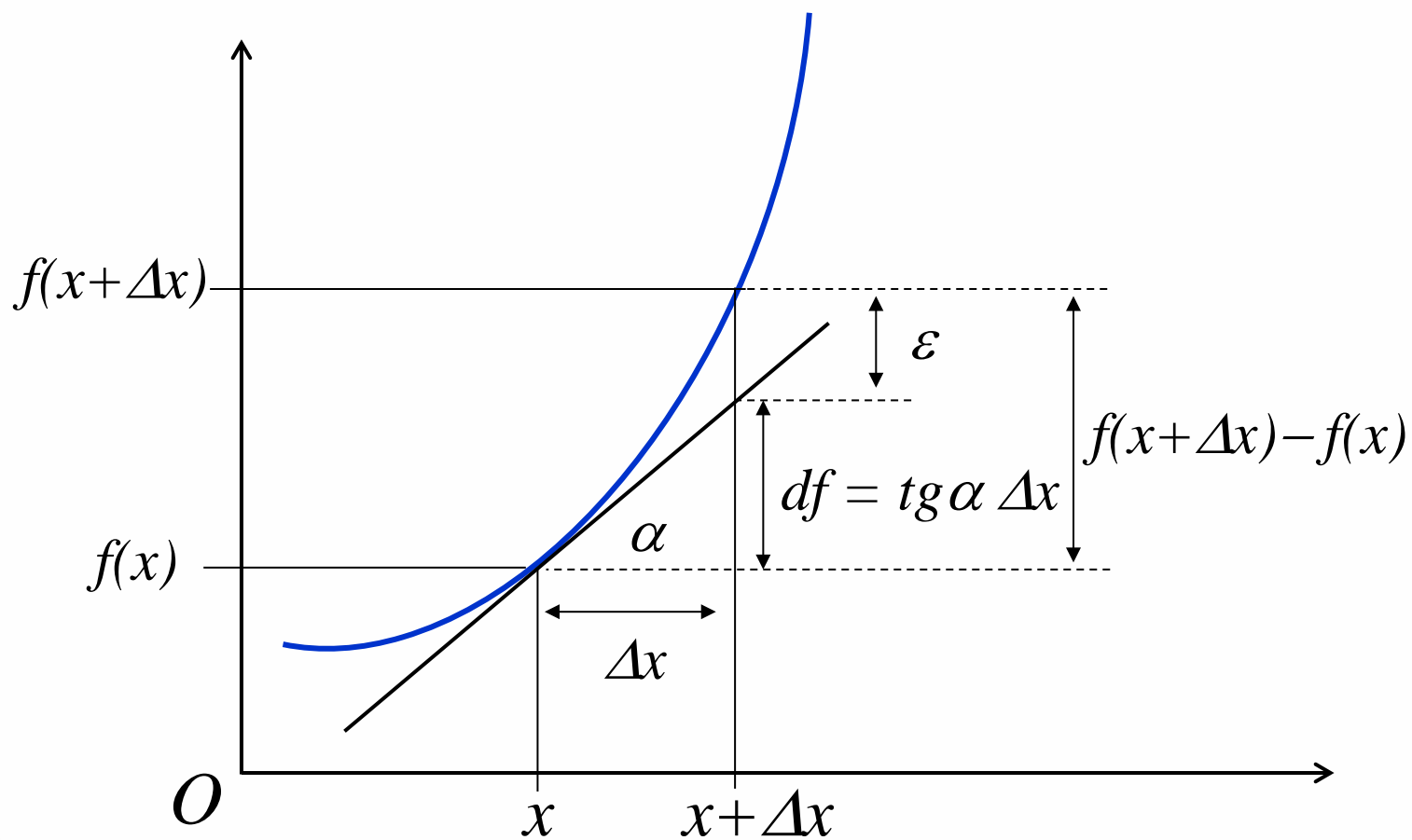
$$df = f'(x)dx$$

➤ in generale il differenziale  $df$  non e' uguale alla variazione  $\Delta f$  della funzione, dove  $\Delta f = f(x+dx) - f(x)$

in generale si ha 
$$\Delta f = df + \varepsilon$$

ma si puo' dimostrare che  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = 0$  ossia che  $\varepsilon$  e' un infinitesimo

di ordine superiore rispetto a  $dx$



# Sviluppo in serie di Taylor di una funzione $f(x)$

→ rappresentazione di una funzione nell'intorno di un generico punto  $x_0$   
tramite un polinomio

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{dove} \quad f^{(n)}(x_0) = \left. \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right|_{x=x_0}$$

con la convenzione  $0! = 1$

uno sviluppo di Taylor in cui  $x_0$  sia uguale a 0 è detto sviluppo di *Maclaurin*

il polinomio che si ottiene è l'approssimazione di ordine  $n$  di  $f(x)$  intorno a  $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x)^n + R_n(x)$$



# Sviluppo in serie di Maclaurin di alcune funzioni

$$(1+x)^{-1} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots \quad -1 < x < +1$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad -1 < x \leq +1$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad -1 < x \leq +1$$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{sen } x \simeq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots \quad -\infty < x < +\infty$$

$$\text{tg } x \simeq x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

# Funzione di due variabili

una funzione reale di due variabili reali e' una corrispondenza tra un insieme di coppie di numeri  $(x, y)$  e un insieme di numeri reali rappresentato dalla variabile dipendente  $z$

$$z = F(x, y)$$

derivate parziali prime

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{F(x, y + \Delta y) - F(x, y)}{\Delta y}$$

derivate parziali seconde

$$F''_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

$$F''_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

derivate parziali seconde miste

$$F''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$F''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

se  $F''_{xy}$  e  $F''_{yx}$  sono continue l'ordine di derivazione e' influente

l' *incremento*  $\Delta F$  della funzione nel passare dal punto di coordinate  $(x_0, y_0)$   
al punto di coordinate  $(x_0 + dx, y_0 + dy)$  e'

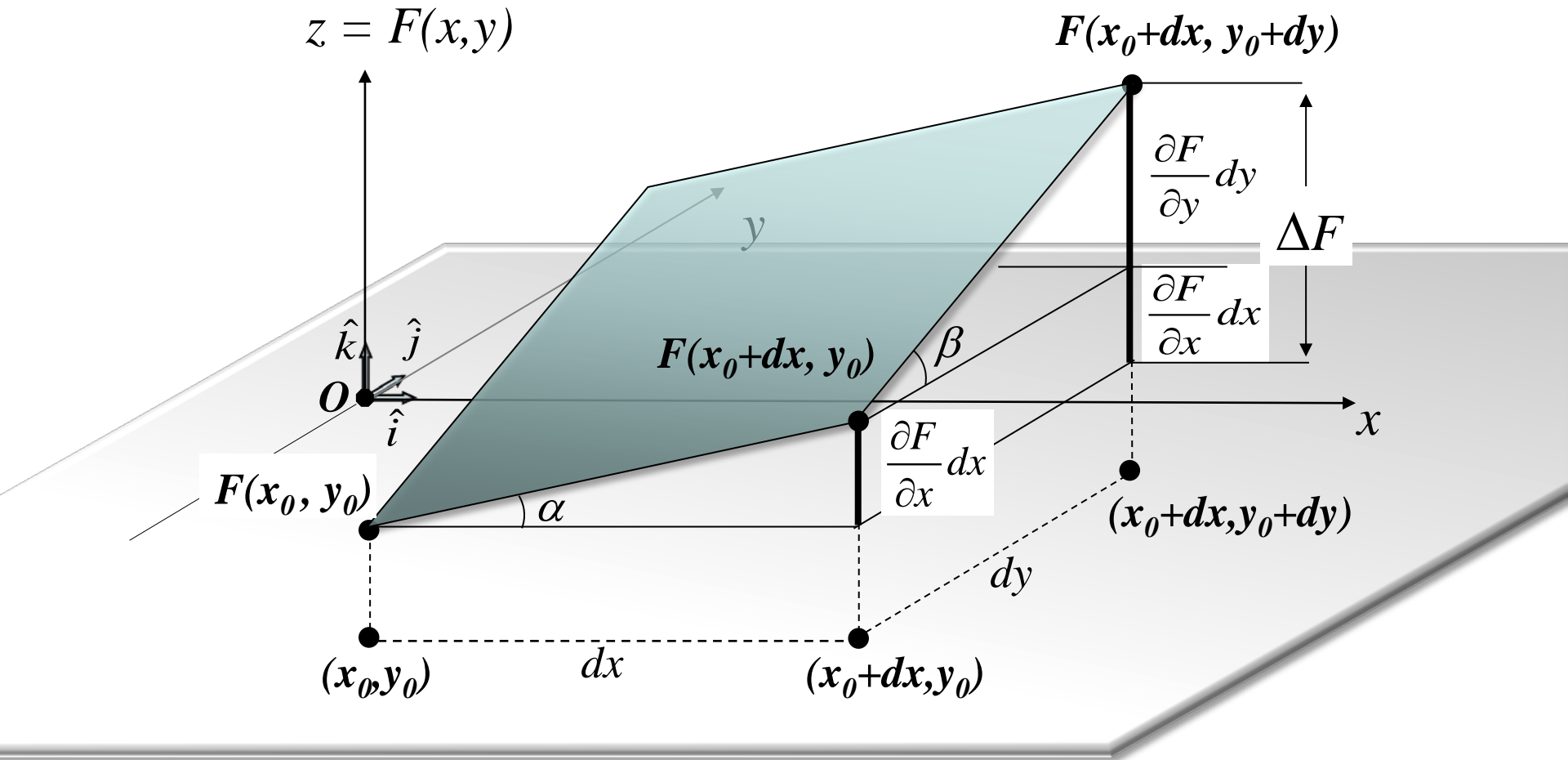
$$\Delta F = F(x_0 + dx, y_0 + dy) - F(x_0, y_0)$$

il differenziale totale della funzione e'  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$

se il luogo dei valori della  $F(x,y)$  fosse il piano  $z = ax + by + d$

$\Delta F = F(x_0 + dx, y_0 + dy) - F(x_0, y_0)$  mentre

il differenziale totale della funzione sarebbe  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$

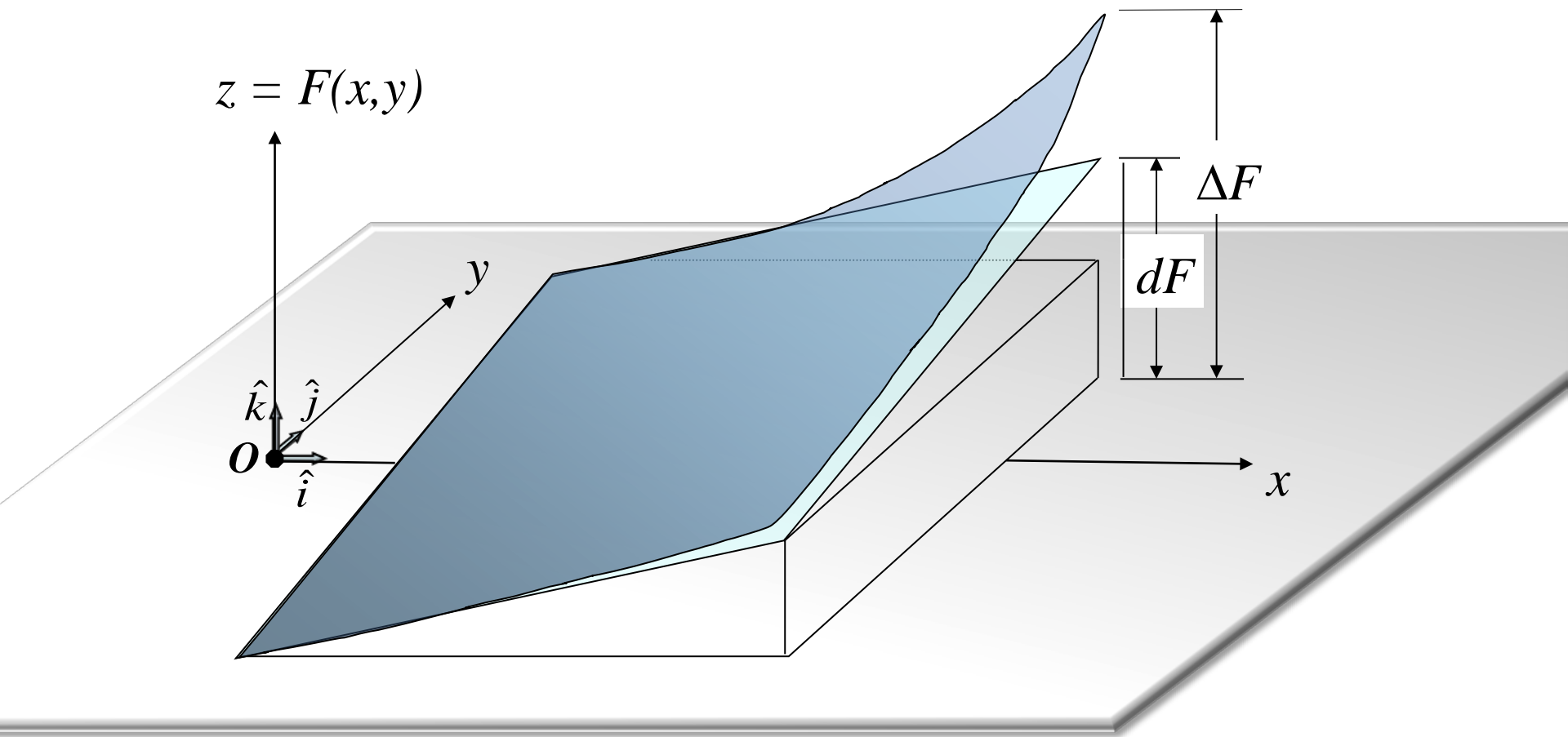


quindi in questo particolare caso  $\Delta F$  coincide con  $dF$

ma in generale  $\Delta F \neq dF$  in effetti in generale

risulta 
$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy \neq dF$$

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy \neq dF$$



➤ ma si ha che  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  sono infinitesimi dello stesso ordine di  $dx$  e di  $dy$

## Legge di propagazione degli errori

se  $w = f(x, y, z)$

se  $\varepsilon_x$  e' l'errore sulla misura della grandezza  $x$

se  $\varepsilon_y$  e' l'errore sulla misura della grandezza  $y$

se  $\varepsilon_z$  e' l'errore sulla misura della grandezza  $z$

l'errore sulla grandezza  $w$  sara' 
$$\varepsilon_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \varepsilon_z^2 + \dots}$$

se  $w = x + y$  
$$\varepsilon_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \dots} = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \dots}$$

se  $w = x \cdot y$  
$$\varepsilon_w = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \varepsilon_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \varepsilon_y^2 + \dots} = \sqrt{\frac{\varepsilon_x^2}{x^2} + \frac{\varepsilon_y^2}{y^2} + \dots}$$



# Backup Slides