Sia dato un campo di forza la cui energia potenziale è descritta dalla relazione

$U\,(x,y,z) = K_1\, r^3 - K_2\, y^2$ dove K_1 e K_2 sono costanti positive ed r è

il modulo del vettore posizionale del generico punto $P(x,y,z)$. Determinare:

a) l'espressione vettoriale del campo di forza

b) il raggio di curvatura della traiettoria di un punto materiale di massa M quando questo si trova nel punto $P\,(0,1,0)$ *con velocità* $\vec{v}(0,1,0) = 2v_0\hat{i}$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad U(x) = K_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - K_2 y^2$$

la relazione tra l'energia potenziale ed il campo di forza e' $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{3}{2} K_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} 2x = -3K_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} x$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\left(\frac{3}{2} K_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} 2y - 2K_2 y \right)$$

$$= -\left(3K_1 (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} y - 2K_2 y \right)$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{3}{2}K_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}2z = -3K_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}z$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

$$= \left(-3K_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}x\right)\hat{i} - \left(3K_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}y - 2K_2y\right)\hat{j} - \left(3K_1(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}z\right)\hat{k}$$

quindi l’espressione del campo in un generico di coordinate $(0,y,0)$ sara’

$$\vec{F}(0,y,0) = -\left(3K_1(y^2)^{\frac{1}{2}}y - 2K_2y\right)\hat{j} = -\left(3K_1y^2 - 2K_2y\right)\hat{j}$$

e l'espressione del campo nel punto P di coordinate $(0,1,0)$ sara'

$$\vec{F}(0,1,0) = -\left(3K_1 - 2K_2\right)\hat{j} = (2K_2 - 3K_1)\hat{j}$$

la velocita' nel punto P era $\vec{\mathrm{v}}(0,1,0) = 2\mathrm{v}_0\hat{i}$

dunque la forza nel punto $(0,1,0)$ e' perpendicolare alla velocita' in quel punto

quindi fornira' la componente centripeta all'accelerazione nel punto $(0,1,0)$

$$\left|\vec{F}(0,1,0)\right| = M\,\frac{\mathrm{v}^2}{\rho} \qquad \Rightarrow \qquad \rho = M\,\frac{\mathrm{v}^2(0,1,0)}{\left|\vec{F}(0,1,0)\right|} = \frac{4M\mathrm{v}_0^2}{(2K_2 - 3K_1)}$$

Backup Slides