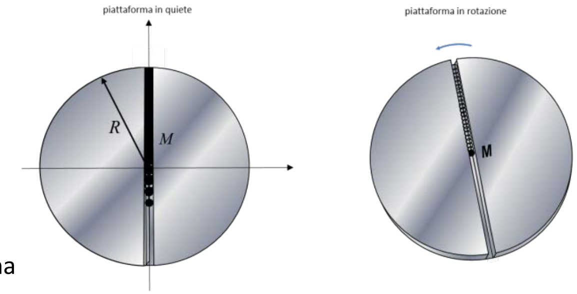
Su di una piattaforma e' praticata una sottile scanalatura passante per il suo centro la piattaforma e' libera di ruotare attorno ad un asse verticale passante per il centro O della piattaforma nella scanalatura e' collocata una massa M libera di scivolare lungo la scanalatura stessa e collegata al bordo esterno della piattaforma tramite una molla ideale di lunghezza a riposo uguale al raggio R della piattaforma e costante elastica k ignota Inizialmente la molla e' compressa poi viene rilasciata ed inizia ad oscillare

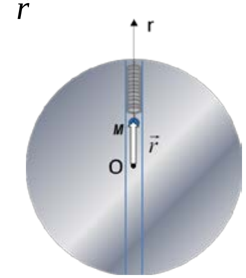
Quando la piattaforma e' messa in rotazione con velocita' angolare ω' costante la massa M oscilla lungo la scanalatura muovendosi di moto armonico semplice con periodo di oscillazione pari a T'

Determinare quale sarebbe il periodo di oscillazione della massa se la piattaforma fosse in quiete



introduciamo un asse coordinato parallelo alla scanalatura e avente per origine il centro O della piattaforma

l' equazione del moto della massa M nel sistema non inerziale solidale alla piattaforma risulta $M\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}_{app}+\vec{F}_{el}$ dove $\vec{r}$ e' il vettore che individua la posizione della massa M rispetto al centro O della piattaforma



$\vec{F}_{app}$ e' la forza apparente in questo caso centrifuga che compare nel sistema non inerziale

$\vec{F}_{el}$ e' la forza elastica prodotta dalla molla $\vec{F}_{el}=-k\Delta r\hat{r}$

essendo la massa in moto nel sistema non inerziale si dovrebbe tenere conto della presenza della forza di Coriolis che pero' risulterebbe perpendicolare alla direzione del moto della massa M dunque la forza di Coriolis sara' in questo caso costantemente bilanciata dalla reazione vincolare esercitata dalle pareti della scanalatura sulla massa M non vi sono attriti in gioco quindi non vi sono altre forze di cui tener conto.

proiettando l'equazione del moto sull'asse di riferimento si ha $M\dfrac{d^2r}{dt^2}=M\omega^2r-kr$ $\quad \dfrac{d^2r}{dt^2}=(\omega^2-\dfrac{k}{M})r$ da cui $\dfrac{d^2r}{dt^2}+(\dfrac{k}{M}-\omega^2)r=0$

equazione di un moto armonico semplice di pulsazione pari a $\omega'=\sqrt{\dfrac{k}{M}-\omega^2}$ di conseguenza il periodo delle oscillazioni della massa M misurato mentre la piattaforma e' in rotazione sara' pari a $T'=\dfrac{2\pi}{\omega'}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}-\omega^2}}$ se la piattaforma fosse fermata la velocita' angolare diverrebbe nulla

percio' il periodo delle oscillazioni diverrebbe $T_0=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}-0}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{k}{M}}}$

il legame tra il periodo delle oscillazioni misurato quando la piattaforma e' in moto rispetto a quando e' ferma si ricava nel modo seguente

$$T_0^{\,2} = \frac{4\pi^2}{\dfrac{k}{M}} \quad \Rightarrow \quad \frac{k}{M} = \frac{4\pi^2}{T_0^{\,2}} \qquad T'^2 = \frac{4\pi^2}{\dfrac{k}{M} - \omega^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{T'^2} = \frac{k}{M} - \omega^2$$

quindi $\dfrac{4\pi^2}{T'^2} = \dfrac{4\pi^2}{T_0^{\,2}} - \omega^2$

da cui $T'^2 = \dfrac{4\pi^2 T_0^{\,2}}{4\pi^2 - T_0^{\,2}\omega^2}$ ossia $T'^2 = \dfrac{T_0^{\,2}}{(1 - \dfrac{T_0^{\,2}\omega^2}{4\pi^2})}$

Backup Slides