Moti in una dimensione (asse x)

se $a(t) = 0 \quad \forall t$ ossia se $\dfrac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2} = 0$

solo la derivata di una costante e' nulla per ogni t ⇨ $\mathrm{v}(t) = cost \equiv \mathrm{v}_0$

⇨ *moto rettilineo uniforme*

$$x(t) = \int \mathrm{v}(t)dt = \int \mathrm{v}_0 dt = \mathrm{v}_0 \int dt = \mathrm{v}_0 t$$

a meno di una costante di integrazione c ⇨ $x(t) = \mathrm{v}_0 t + c$

ponendo $t = 0$ nella $x(t) = \mathrm{v}_0 t + c$ $\Rightarrow$ $x(t = 0) = c$

dunque c e' semplicemente la posizione occupata dal punto

(la sua ascissa) al tempo $t = 0$

per determinare c si dovra' ricorrere ad ulteriori informazioni,

le "condizioni al contorno"

spesso, ma non sempre, si tratta di "condizioni iniziali" del moto se $x(t=0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad c = x_0$

in conclusione :

$$x(t) = \mathrm{v}_0 t + x_0$$ equazione oraria per lo spazio percorso

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0$$ equazione oraria per la velocita’

$$a(t) = 0$$ equazione oraria per la accelerazione

Moto in una dimensione

se $a(t) = cost = a$ ossia se $\frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = a$

⇨ moto *rettilineo uniformemente accelerato*

si ha: $\mathrm{v}(t) = \int a \; dt = a \int dt = \; at$ a meno di una costante di integrazione

se al tempo t = 0 $\mathrm{v}(t = 0) = \mathrm{v}_0$ ⇨ $\mathrm{v}(t) = at + \mathrm{v}_0$

$$x(t) = \int \mathrm{v}(t)\ dt = \int (at + \mathrm{v}_0)\ dt = \int at\ dt + \int \mathrm{v}_0 dt = a\int t dt + \mathrm{v}_0 \int dt$$

$$= \frac{1}{2} a\ t^2\ +\ \mathrm{v}_0 t$$ a meno di una costante di integrazione

se al tempo t = 0 $\quad x(t=0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2} a t^2 +\ \mathrm{v}_0 t + x_0$

in conclusione :

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 +\ \mathrm{v}_0 t + x_0$$ equazione oraria per lo spazio percorso

$$\mathrm{v}(t) = at + \mathrm{v}_0$$ equazione oraria per la velocita'

$$a(t) = a$$ equazione oraria per la accelerazione

Moto in una dimensione

se $a(t) = -k\ \mathrm{v}(t)$ dove k e' una costante ***positiva*** per definizione

da $a = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt}$ ⇨ $\dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = -k\mathrm{v}$ ⇨ $\dfrac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}} = -k\ dt$

integrando ambo i membri nelle rispettive variabili : $\displaystyle\int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}(t)} \frac{1}{\mathrm{v}}\ d\mathrm{v} = \int_0^t -k\ dt$

⇨ $\ln \mathrm{v}(t) - \ln \mathrm{v}_0 = -kt$ ossia $\ln \dfrac{\mathrm{v}(t)}{\mathrm{v}_0} = -kt$

da cui $\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 e^{-kt}$ → la velocita' decresce esponenzialmente nel tempo

⇨ "*moto rettilineo smorzato esponenzialmente*" da $\mathrm{v} = \dfrac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \int \mathrm{v}\,dt$ quindi $x(t) = x_0 + \int_0^t \mathrm{v}_0 e^{-kt}\,dt =$

$$x_0 - \frac{\mathrm{v}_0}{k} e^{-kt}\Big|_0^t \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 - \frac{\mathrm{v}_0}{k}\left(e^{-kt} - 1\right)$$

Moto in una dimensione

$$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad \text{se } x_0 = 0 \quad x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$$

la rapidita' di variazione della funzione e' determinata dal valore di k

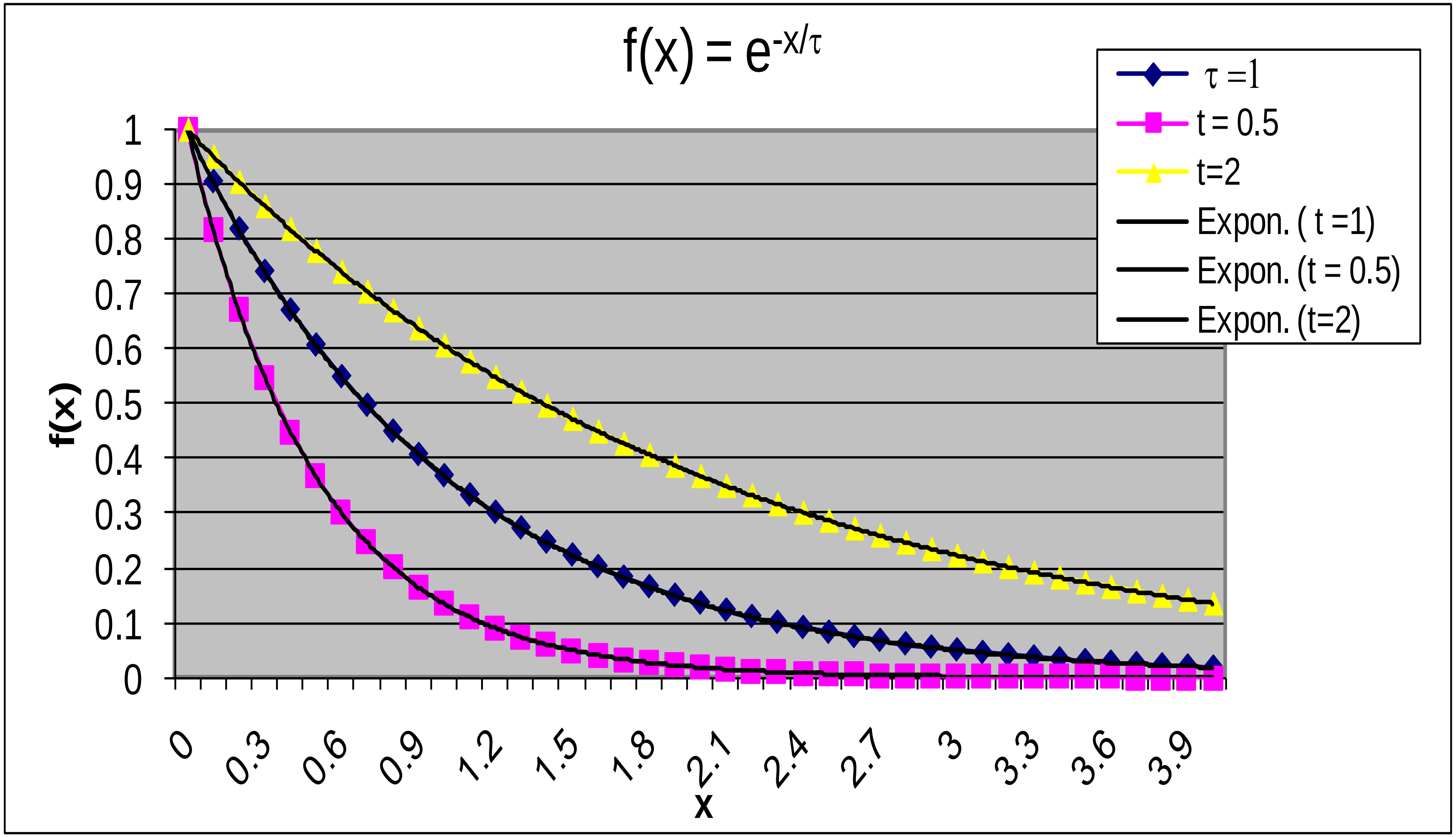
$\tau = 1/k$ e' la "*costante di tempo*" o " *vita media* "

τ e' il tempo dopo il quale la funzione si e' ridotta di un fattore pari al numero di Nepero e , ossia di un fattore circa 2.7

il tempo di dimezzamento $t_{1/2}$ e' quel tempo dopo il quale la funzione si e' ridotta della meta', rispetto al valore iniziale

$$t_{1/2} = 0.693\,\tau$$

Moto in una dimensione



Moto in una dimensione

se $a(t) = -\ \omega^2 x(t)$ → moto *armonico semplice*

infatti risulta che le equazioni orarie per lo spostamento e la velocita' sono

funzioni armoniche, ossia

$x(t) = A cos(\omega t + \vartheta_0)$ o, indifferentemente, $x(t) = A sen(\omega t + \vartheta_0^{'})$

A → ampiezza del moto

ω → pulsazione

θ_0 e θ'_0 → fasi iniziali derivando l'equazione oraria dello spostamento $x(t) = Acos(\omega t + \vartheta_0)$

si ha $\mathrm{v}(t) = \dfrac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \vartheta_0)$

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \vartheta_0)$$

ossia $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ → equazione dell'oscillatore armonico se una qualsiasi grandezza y di un sistema fisico soddisfa all' equazione differenziale

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

allora y oscilla nel tempo con andamento armonico non smorzato

esiste infatti uno ed un solo tipo di soluzioni a questa equazione :

le funzioni armoniche, seno o coseno (indifferentemente)

e viceversa :

se una grandezza ha andamento nel tempo di tipo armonico deve soddisfare a questo tipo di equazione differenziale

Moto in una dimensione

riepilogando se

$a(t) = 0$ → moto *rettilineo uniforme*

$a(t) = cost = a$ → moto *rettilineo uniformemente accelerato*

$a(t) = -k\ \mathrm{v}(t)$ con $k > 0$ → moto *rettilineo smorzato esponenzialmente*

$a(t) = -\ \omega^2 x(t)$ → moto *rettilineo armonico semplice*

nel caso piu' generale possibile l'accelerazione potra' essere una generica funzione

$$a = f(x, \mathrm{v}, t)$$

Moto in una dimensione

se $x(t) = A(t)sen(\omega t + \vartheta_0) + x_0$ dove $A(t) = Ae^{-kt}$

si parla di moto *armonico smorzato esponenzialmente*

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -kAe^{-kt}sen(\omega t + \vartheta_0) + Ae^{-kt}\omega cos(\omega t + \vartheta_0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}(t) = Ae^{-kt}\left(\omega cos(\omega t + \vartheta_0) - ksen(\omega t + \vartheta_0)\right)$$

derivando la $\quad \mathrm{v}(t) = Ae^{-kt}\left(\omega cos(\omega t + \vartheta_0) - ksen(\omega t + \vartheta_0)\right)$ $\quad$ si ha

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} =$$

$$= -Ak\omega e^{-kt} cos(\omega t + \vartheta_0) - A\omega^2 e^{-kt} sen(\omega t + \vartheta_0)$$

$$+Ak^2 e^{-kt} sen(\omega t + \vartheta_0) \; - Ae^{-kt} k\omega \; cos(\omega t + \vartheta_0)$$

$$a(t) = Ae^{-kt}\left((k^2 - \omega^2) sen(\omega t + \vartheta_0) - 2k \;\; \omega cos(\omega t + \vartheta_0)\right)$$

l'equazione differenziale caratteristica e'

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + (\omega^2 + k^2)x = 0$$

→ equazione dell'oscillatore armonico smorzato esponenzialmente

Backup slides