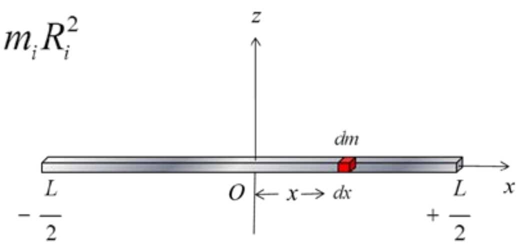
Determinare il momento d'inerzia di una sbarretta omogenea a forma di parallelepipedo di massa M e lunghezza L rispetto ad un asse passante per il centro della sbarretta ed ortogonale alla sbarretta stessa assumendo che la superficie trasversa della sbarretta S sia costante ovunque e che la massa sia distribuita in modo uniforme entro il volume della sbarretta

il momento d'inerzia e' $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$

e in questo caso unidimensionale

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$$



ma, dato che si opera nel continuo, la definizione di momento d'inerzia

diviene $I_z = \int x^2 dm$ dove $dm = \rho dV$

l'asticella e' omogenea e quindi con densita' di massa <u>costante</u> e pari a

$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{SL}$ dove S e' la superficie trasversa della sbarretta

il volume di un parallelepipedo di area di base S e altezza x e' $V = Sx$

quindi per un parallelepipedo infinitesimo si avra' $dV = Sdx$

e $I_z = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 \rho dV = \rho \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} x^2 S dx = \rho S \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{1}{12} \rho S L^3$

ma $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{SL}$ per cui $I_z = \frac{1}{12} M L^2$

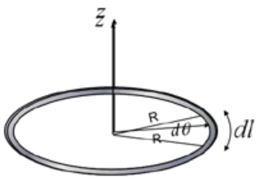
Determinare il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il centro dell'anello

di un anello omogeneo, di raggio R, di massa totale M e di densita' volumetrica

di massa ρ costante, nell'ipotesi che le dimensioni trasverse dell'anello siano

trascurabili rispetto al suo raggio. La superficie trasversa S dell'anello e' costante.

il momento d'inerzia e' $I_z = \int R^2 dm = R^2 \int dm$ dato che R e' costante



e dove $dm = \rho dV$ il volume infinitesimo e'

$dV = Sdl = SRd\vartheta$ quindi

$$I_z = R^2 \int_0^{2\pi} \rho SRd\vartheta = \rho SR^3 \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi\rho SR^3$$

il volume dell'anello e' $V = 2\pi RS$ e dato che la massa

e' distribuita in maniera uniforme lungo l'anello $\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{M}{2\pi RS}$

per cui $I_z = 2\pi\rho SR^3 = \dfrac{M}{2\pi RS} 2\pi SR^3 = MR^2$

in conclusione il momento d'inerzia dell' anello rispetto all'asse z e'

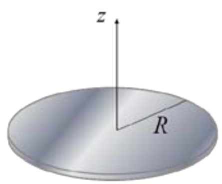
$$I_z = MR^2$$

Determinare il momento d'inerzia di un disco rispetto ad un asse perpendicolare al piano del disco passante per il suo centro. Il disco ha spessore trascurabile, ha massa M, raggio R e densita' superficiale di massa σ costante.

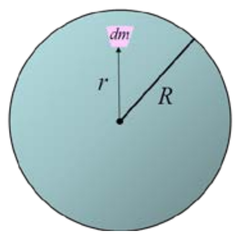
il momento d'inerzia $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ dove r e' la distanza dall'asse del disco

diverra' $I_z = \int r^2 dm$ con $dm = \sigma dS$ il problema e' bidimensionale

quindi avremo a che fare con un integrale in due variabili



vista dall'alto

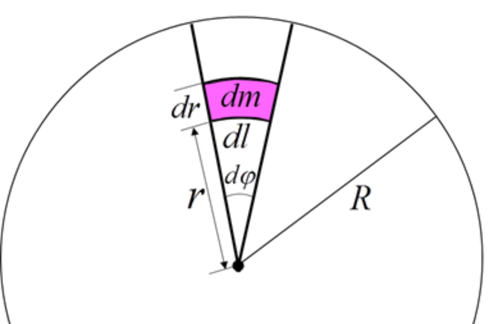


utilizziamo le coordinate polari piane con $0 < r < R$ e $0 < \varphi < 2\pi$

$$dS \approx dl dr \quad \text{ma} \quad dl = r d\varphi \quad \Rightarrow \quad dS \approx r dr d\varphi$$

quindi $dm = \sigma dS \quad \Rightarrow \quad dm = \sigma r dr d\varphi$ e

$$I_z = \int r^2 dm = \iint \sigma r^2 r dr d\varphi = \sigma \iint r^3 dr d\varphi$$



in definitiva dobbiamo calcolare

$$I_z = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi$$

in questo caso e' possibile fattorizzare l'integrale

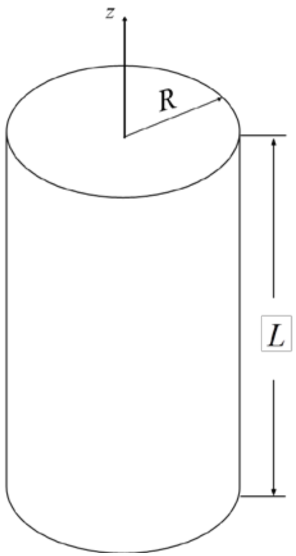
$$I_z = \sigma \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr$$

$$= \frac{2\pi\sigma}{4} R^4 = \frac{1}{2}\pi\sigma R^4$$

dato che $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{2}\pi R^4 \frac{M}{\pi R^2}$

in conclusione il momento d'inerzia e' $I_z = \frac{1}{2} M R^2$

Determinare il momento d'inerzia di un cilindro di massa M, raggio R, altezza L e di densita' volumetrica di massa ρ costante, rispetto all'asse del cilindro.



il momento d'inerzia $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$

dove r e' la distanza dall'asse del cilindro

diverra' $I_z = \int r^2 dm$ con $dm = \rho dV$

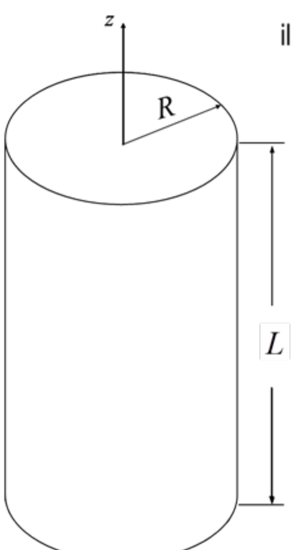
suddividiamo il cilindro in cilindri infinitesimi

di raggio r con $0 < r < R$ e volume dV

e ragioneremo nel modo, <u>approssimativo</u>, seguente

il volume di un cilindro di raggio R e altezza L e' $V = \pi R^2 L$ percio'

il volume di un cilindro di raggio r generico sara' $V(r) = \pi r^2 L$ quindi



il volume di un cilindro di raggio $r + dr$ sara'

$$V(r+dr) = \pi(r+dr)^2 L$$

$$= \pi r^2 L + 2\pi r dr L + \pi dr^2 L$$ e

$$dV = V(r+dr) - V(r)$$

$$= 2\pi r dr L + \pi L dr^2 \simeq 2\pi r dr L$$

dove si e' trascurato il termine in dr^2 in quanto infinitesimo di ordine superiore rispetto a dr

$$I_z = \int_0^R r^2 \rho dV \simeq \int_0^R r^2 \rho (2\pi r L dr)$$ e dato che ρ e'costante

$$= 2\pi\rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$$

dunque $I_z = \frac{1}{2}\pi\rho L R^4$ ma $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}$ percio'

il momento d'inerzia rispetto all'asse del cilindro e' $I_z = \frac{1}{2} M R^2$

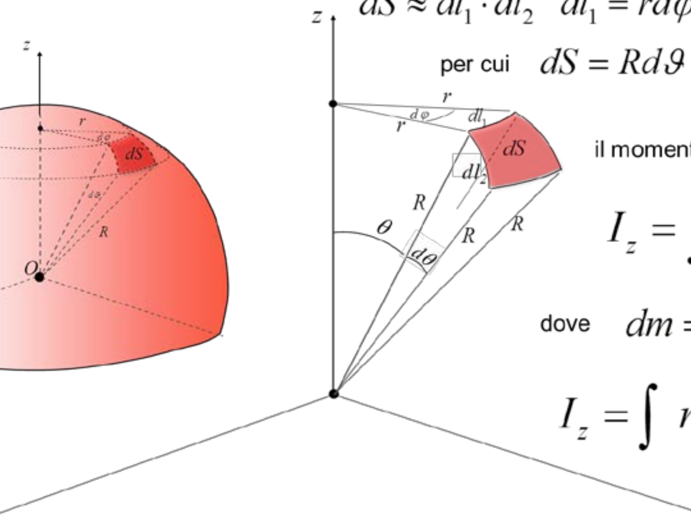
Determinare il momento d'inerzia, di un sottile guscio sferico omogeneo, di raggio R, massa totale M e di densita' **superficiale** di massa σ costante rispetto ad un asse passante per il centro del guscio,

data la simmetria del problema opereremo in coordinate polari sferiche

se dS e' una porzione infinitesima di superficie del guscio sferico riesce

$$dS \approx dl_1 \cdot dl_2 \quad dl_1 = rd\varphi \quad \text{e} \quad dl_2 = Rd\vartheta$$

per cui $dS = Rd\vartheta \cdot rd\varphi$



il momento d'inerzia e'

$$I_z = \int r^2 dm$$

dove $dm = \sigma dS$ quindi

$$I_z = \int r^2 \sigma R d\vartheta r d\varphi$$

$$I_z = \int r^2 \sigma R d\vartheta r d\varphi = \sigma R \int r^3 d\vartheta d\varphi \quad \text{ma} \quad r = R sen\vartheta$$

dunque $I_z = \sigma R^4 \int sen^3\vartheta d\vartheta d\varphi = \sigma R^4 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} sen^3\vartheta d\vartheta d\varphi$

$$= \sigma R^4 \int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\sigma R^4 \int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta$$

$$\int_0^{\pi} sen^3\vartheta d\vartheta = -\int_1^{-1} (1-\cos^2\vartheta) d\cos\vartheta = \frac{4}{3} \quad \text{per cui} \quad I_z = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4$$

per determinare σ si ragiona nel modo seguente :

la superficie del guscio e' $S = 4\pi R^2$ e dato che la massa

e' distribuita in maniera uniforme sul guscio sferico $\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{4\pi R^2}$

riesce $I_z = \frac{8}{3}\pi\sigma R^4 = \frac{8}{3}\pi \frac{M}{4\pi R^2} R^4 = \frac{2}{3} MR^2$

in conclusione il momento d'inerzia rispetto all'asse z e' $I_z = \frac{2}{3} MR^2$

Determinare il momento d'inerzia, rispetto ad un asse passante per il centro

di una sfera di raggio R, massa totale M e di densita' volumetrica

di massa ρ costante ovunque.

data la simmetria del problema opereremo in coordinate polari sferiche

consideriamo una sfera di raggio r generico con [0 < r < R]

e un volumetto infinitesimo dV di area di base dS e di altezza dr

in coordinate polari sferiche il volume dV si eprime come

$$dV = r^2 dr sen\vartheta d\vartheta d\varphi$$

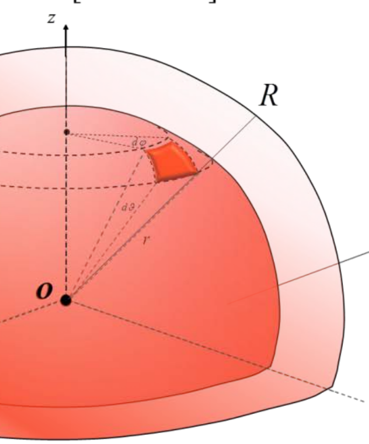
consideriamo un guscio sferico di spessore infinitesimo dr

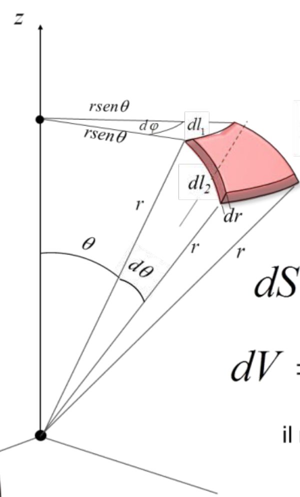
di raggio generico r

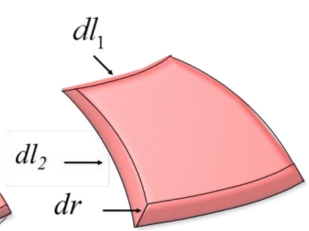
concentrico ad una sfera

piena di raggio R

con $[\,0 < r < R\,]$







$$dS = r^2 sen\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$dV = r^2 sen\vartheta d\vartheta d\varphi dr$$

il momento d'inerzia e'

$$I_z = \int (rsen\vartheta)^2 dm$$

dove $dm = \rho dV$ quindi

$$I_z = \int r^2 sen^2\vartheta \rho (r^2 dr sen\vartheta d\vartheta d\varphi) = \rho \int r^4 sen^3\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

dunque $I_z = \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 dr sen^3\vartheta d\vartheta d\varphi$

$$= \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi sen^3\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= 2\pi\rho \frac{R^5}{5} \int_0^\pi sen^3\vartheta d\vartheta$$

ma $\int_0^\pi sen^3\vartheta d\vartheta = -\int_1^{-1} (1-\cos^2\vartheta) d\cos\vartheta = \frac{4}{3}$

per cui $I_z = \frac{2\pi}{5}\frac{4}{3}\rho R^5$

per determinare ρ si ragiona nel modo seguente :

il volume della sfera e' $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ e dato che la massa

e' distribuita in maniera uniforma entro la sfera $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

per cui $I_z = \frac{2\pi}{5}\frac{4}{3}\rho R^5 = \frac{2\pi}{5}\frac{4}{3}\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} R^5 = \frac{2}{5} M R^2$

in conclusione: $I_z = \frac{2}{5} M R^2$

Backup Slides