Campo scalare

e’ una regione di spazio dove punto per punto sia definibile una funzione

scalare continua e derivabile ovunque (una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$)

trascurando la dipendenza dal tempo e operando in coordinate cartesiane

sara’ indicata di seguito come $u(x,y,z)$ (o come $U(x,y,z)$ e in altri modi)

il luogo dei punti in cui un campo scalare assume un valore costante e’ detto

superficie di livello ed e’ determinato dall’ equazione $u(x,y,z) = c$

Campo vettoriale

e' una regione di spazio dove sia definibile una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$

ad es. una regione di spazio dove punto per punto sia presente

una grandezza <u>vettoriale</u>

trascurando la dipendenza dal tempo e operando in coordinate cartesiane

un generico campo vettoriale sara' indicato di seguito come $\vec{w}(x,y,z)$

o come $\vec{F}(x,y,z)$ nel caso di una forza → " campo di forze" etc.

Rappresentazione grafica dei campi scalari

per rappresentare graficamente il campo scalare si considerano famiglie

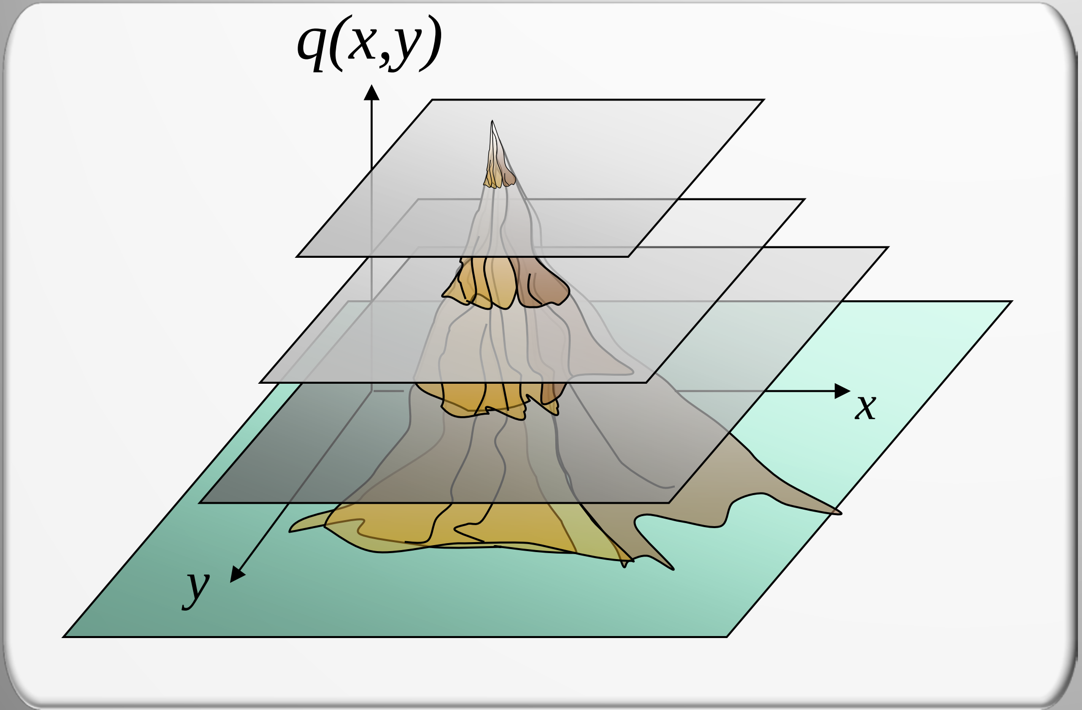
di curve equidistanziate ($u(x,y,z) = c$, $u(x,y,z) = 2c$ etc.) e si graficano

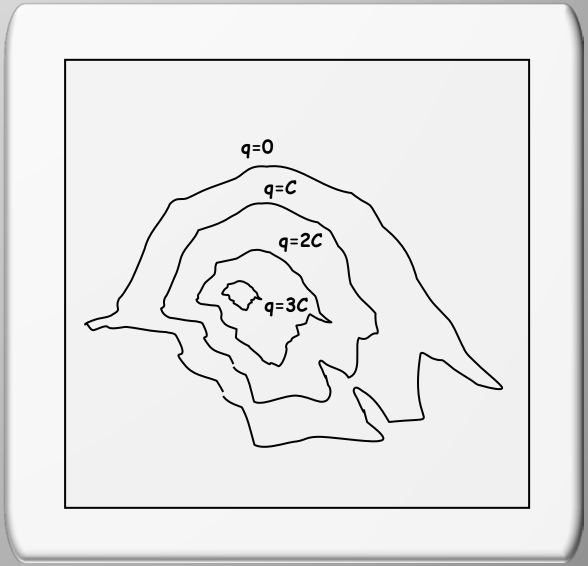
le superfici corrispondenti

esempio bidimensionale le carte topografiche :

si disegna in un piano il luogo dei punti in cui la quota $q(x,y)$ sul livello del mare

e' costante per valori della quota prefissati ed equidistanziati tra loro





- le linee si infittiscono dove la variazione di quota e' piu' rapida

Gradiente di un campo scalare

se a partire dal punto di coordinate x, y, z si fa uno spostamento infinitesimo

$$d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

in una direzione qualsiasi la variazione

del campo sara'

$$\Delta u \cong du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

introducendo l'**operatore** differenziale " ***gradiente*** "

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

si ha

$$du = \vec{\nabla}u \cdot d\vec{l}$$

in coordinate cartesiane si definisce ***gradiente*** del campo scalare u

$$grad(u) = \vec{\nabla} u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$$

il luogo dei punti in cui il campo scalare e' costante, $u(x,y,z) = c$,

e' una superficie detta di livello

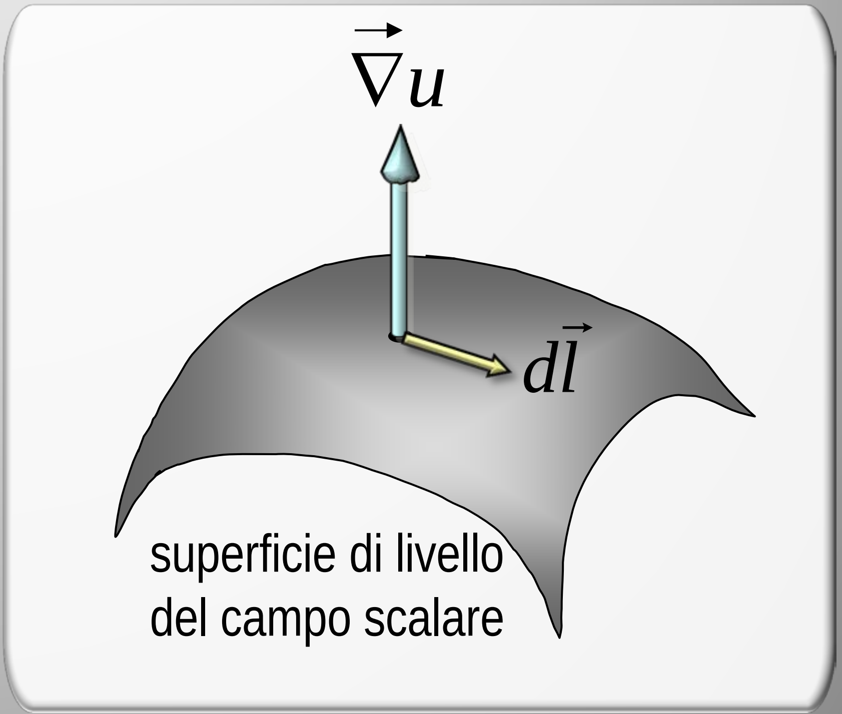
se ci si muove di un tratto infinitesimo dl *lungo* la superficie di livello

il campo non varia e $\Delta u = du = 0$

da $du = \vec{\nabla} u \cdot d\vec{l}$ → la direzione

del gradiente e' quella ***perpendicolare***

alla superfici di livello del campo scalare



il gradiente e' un vettore   e fornisce la rapidita' di variazione del campo scalare

lungo la direzione ed il verso   in cui si ha la maggior variazione del campo

il modulo del gradiente e'

$$\left|\nabla u\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

dato un campo scalare $u(x,y,z)$ e' ***sempre*** possibile ricavarne un campo vettoriale attraverso l'operatore gradiente

ma

dato un generico campo vettoriale $\vec{w}(x,y,z)$ ***non sempre*** e' possibile trovare un campo scalare collegato a $\vec{w}$ tramite l'operatore gradiente

i campi vettoriali ricavabili da un campo scalare attraverso l'operatore gradiente sono detti ***conservativi***

Attenzione: conservativo ***non*** significa costante nel tempo

Rapprentazione grafica dei campi vettoriali

per rappresentare graficamente un campo vettoriali si usano le “linee di flusso”

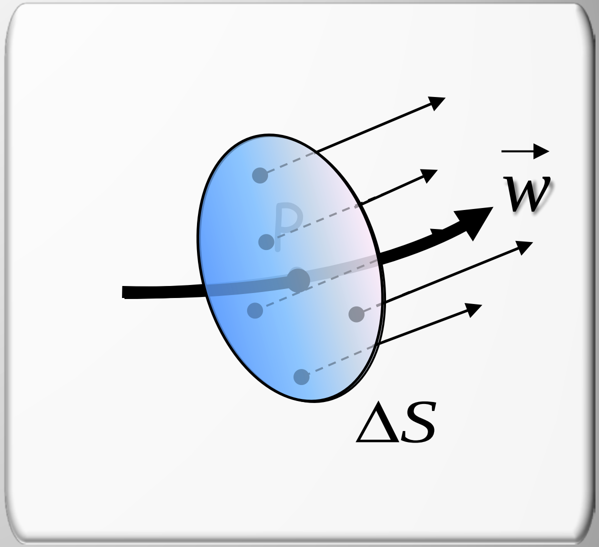
o ’’linee di campo’’ , o “linee di forza”

le linee di flusso (o di campo o di forza) di un campo vettoriale $\vec{w}$ sono curve continue tracciate in modo che

- la tangente alla linea di campo in ogni punto dello spazio fornisce la direzione di $\vec{w}$ in quel punto

- l’ orientatamento della linea e’ nel verso concorde al campo vettoriale

Criterio di Faraday



in un intorno del generico punto P si considera una

piccola area ΔS perpendicolare alla direzione di $\vec{w}$

in quel punto all'interno dell' area ΔS si tracciano

linee di campo perpendicolari alla superficie e distribuite in modo

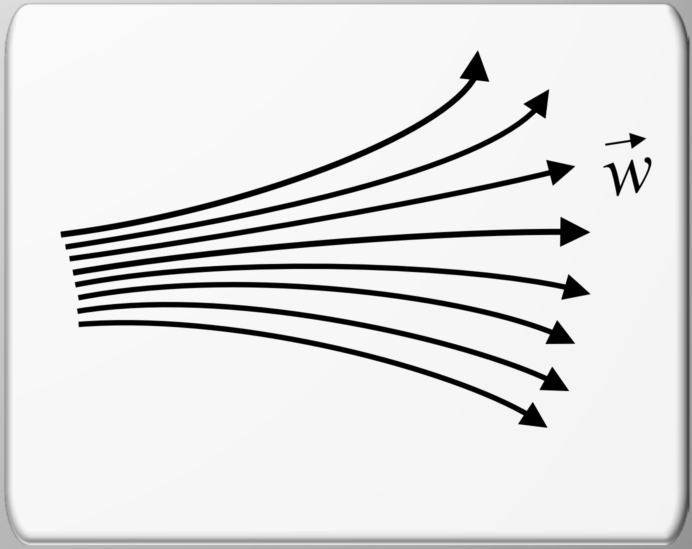
uniforme sulla superficie il numero di linee di forza ΔN da tracciare e' :

$$\Delta N = \left|\vec{w}(x, y, z)\right| \Delta S$$

la rappresentazione del campo diviene rigorosa al limite di ΔS

tendente a zero in quanto si ha:

$$dN = \left|\vec{w}(x, y, z)\right| dS \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{dS} = \left|\vec{w}\right|$$



il senso del criterio e' che

la densita' superficiale di linee di campo

e' pari al modulo del campo vettoriale

Integrale di linea di un campo vettoriale

dati due punti A e B e una linea orientata Γ si definisce

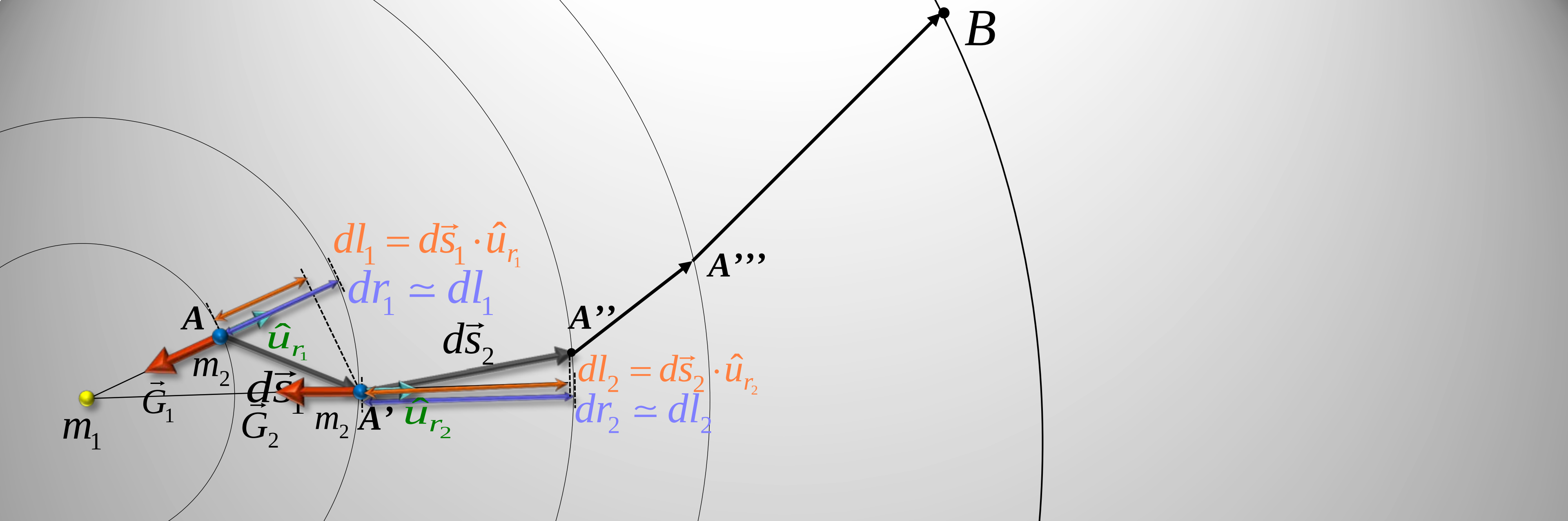
integrale di linea del campo vettoriale $\vec{w}$

$$\int_A^B \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

lungo la linea Γ

Esempio : calcolo dell’integrale di linea del campo gravitazionale newtoniano

per ogni spostamento infinitesimo lungo Γ si dovra’ calcolare il prodotto scalare della forza di gravita’ $\vec{G}$ con il vettore spostamento infinitesimo $d\vec{l}$ assumendo che la forza sia costante lungo lo spostamento infinitesimo



$$dL_1 = \vec{G}_1 \cdot d\vec{s}_1 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2} \hat{u}_{r_1} \cdot d\vec{s}_1 \quad = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2} dl_1 \;\simeq -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_1^2} dr_1$$

$$dL_2 = \vec{G}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2^2} \hat{u}_{r_2} \cdot d\vec{s}_2 \quad \Rightarrow \quad dL_2 \simeq -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_2^2} dr_2$$

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\gamma \frac{m_1 m_2 dr}{r^2} = -\gamma m_1 m_2 \int_A^B \frac{dr}{r^2} = (-\gamma m_1 m_2)(-\frac{1}{r})\Big|_{r_A}^{r_B}$$

$$= \frac{\gamma m_1 m_2}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

dunque $L_{A\to B} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_A}$

Circuitazione di un campo vettoriale

se la linea e' chiusa si parla della *circuitazione* di $\vec{w}$ lungo il circuito C

$$\Gamma_C(\vec{w}) = \oint_C \vec{w} \cdot d\vec{l}$$

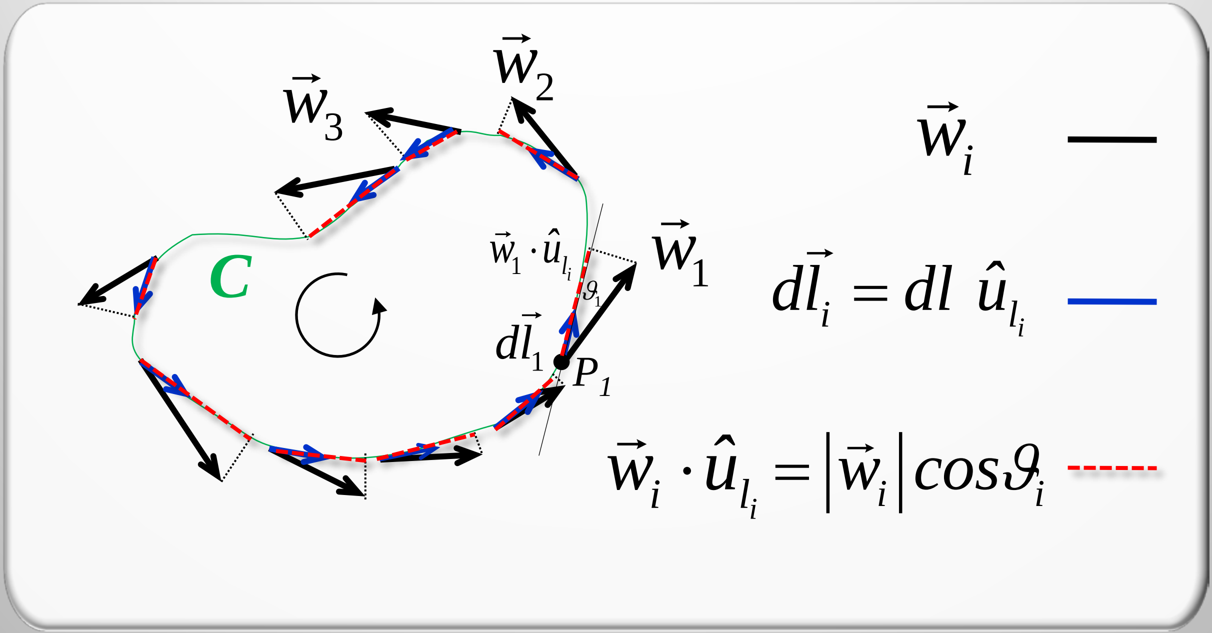
significato fisico della circuitazione:

la circuitazione di un campo vettoriale segnala la tendenza

ad " *incurvarsi* " delle linee di campo di un campo vettoriale

in un punto dello spazio

Esempio # 1



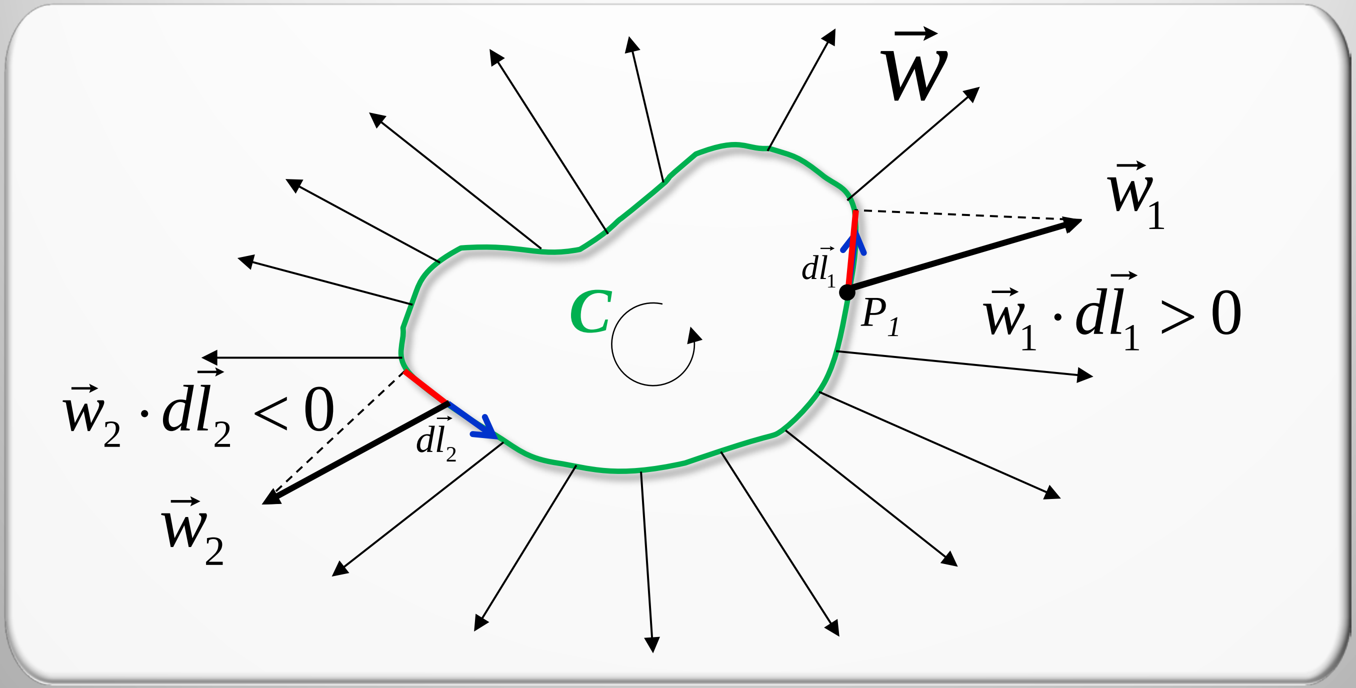
tutti i prodotti scalari $\vec{w}_i \cdot \hat{u}_{l_i}$ ossia le proiezioni di $\vec{w}$ lungo la linea chiusa

e orientata C sono concordi in segno in particolare in questo caso

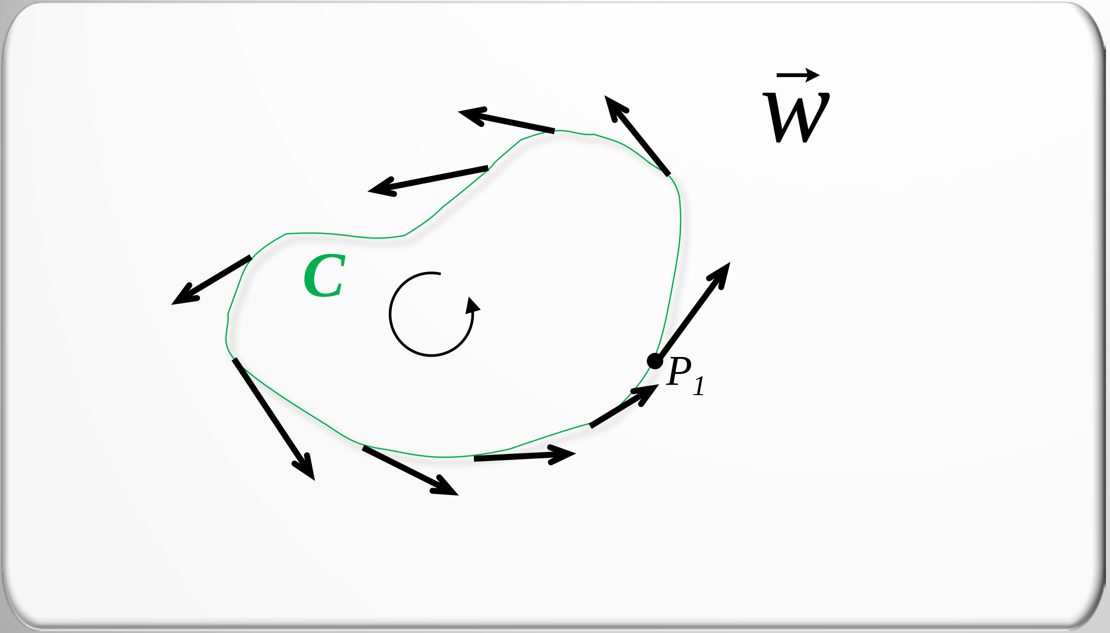
gli angoli θ_i sono tutti $< 90^o$ → tutti i cos $\theta_i > 0$ → tutti i $\vec{w}_i \cdot d\vec{l}_i$ saranno > 0

e la circuitazione di $\vec{w}$ lungo il circuito Γ in questo caso risultera' positiva

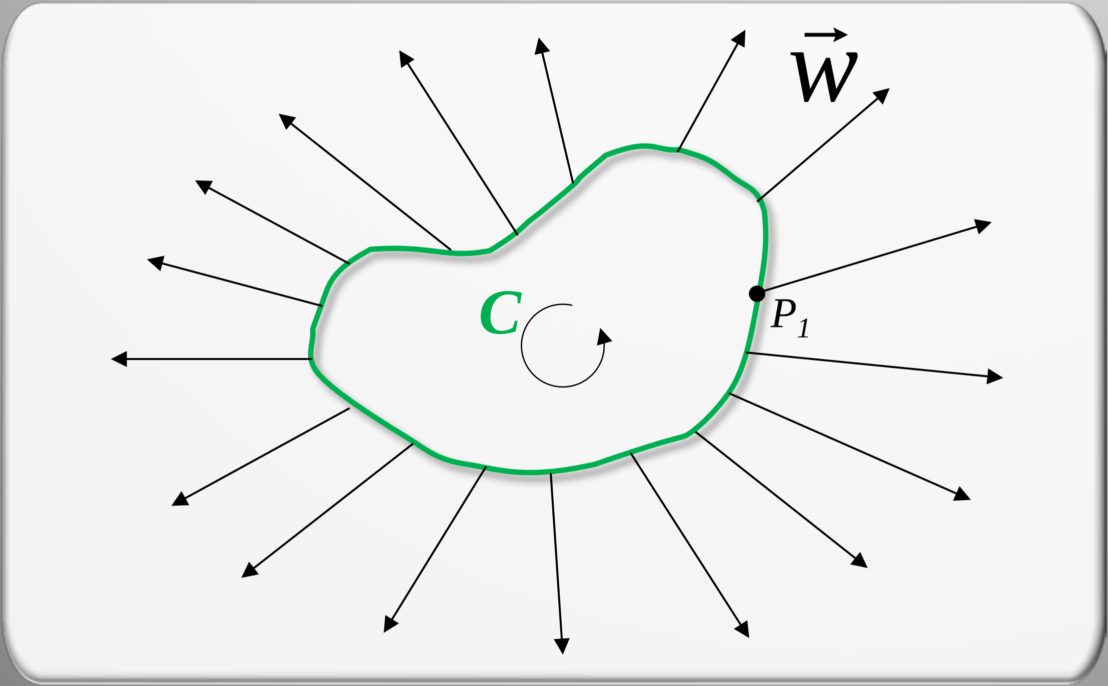
Esempio # 2



in questo caso alcuni prodotti scalari saranno positivi mentre altri forniranno un contributo negativo quindi la circuitazione di $\vec{w}$ lungo il circuito Γ potebbe risultere positiva, negativa o nulla



il campo ha una tendenza globale ad incurvarsi , ossia a ‘’ seguire ‘’ la linea C



il campo non ha una tendenza globale a ‘’ seguire ‘’ la linea C , piuttosto ha tendenza ad ‘’irraggiarsi’’ da un punto, ossia ad avere un andamento ‘’radiale’’

Rotore di un campo vettoriale

l'operatore $rot(\vec{w}) \equiv \vec{\nabla} \times \vec{w}$

e' detto **rotore** del campo vettoriale $\vec{w}$

l'operatore rotore opera su di un campo **vettoriale** e fornisce un **vettore**

in coordinate cartesiane:

$$\vec{\nabla} \times \vec{w} = \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

sviluppo del determinante con la regola di Cramer

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

se il rotore di $\vec{w}$ e' **nullo** il campo e' detto ''irrotazionale'' o " *conservativo* "

Conservativita' di un campo vettoriale

vi sono una serie di definizioni di "**conservativita**' " di un campo vettoriale

tutte tra loro <u>equivalenti</u> un campo vettoriale e' conservativo

- se l'integrale di linea del campo vettoriale calcolato lungo un percorso qualsiasi <u>non dipende dal percorso</u>, ma solo dalle coordinate degli estremi di partenza e di arrivo

- se la circuitazione del campo e' nulla

- se esiste una funzione scalare della posizione nello spazio, ossia una $u(x,y,z)$ (ed eventualmente anche del tempo), tale per cui l'integrale di linea tra due punti P_1 e P_2 calcolato lungo un percorso qualsiasi e' uguale sempre e soltanto alla differenza che la funzione u assume nei punti P_1 e P_2 rispettivamente

- se il rotore del campo e' nullo

Divergenza di un campo vettoriale

l'operatore $$div(\vec{w}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{w}$$

e' detto **divergenza** del campo vettoriale $\vec{w}$

l'operatore divergenza opera su di un campo **vettoriale** e fornisce uno **scalare**

in coordinate cartesiane se :

$$\vec{w} = w_x(x, y, z)\hat{i} + w_y(x, y, z)\hat{j} + w_z(x, y, z)\hat{k}$$

la divergenza di $\vec{w}$ e'

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

Backup slides