Moto di trascinamento rettilineo accelerato

dati due sistemi di riferimento, O (inerziale) e O' (mobile), di assi cartesiani paralleli supponiamo che

a) all'istante $t = 0$ le origini dei due sistemi O e O' coincidano,

b) che O' abbia una accelerazione costante (di modulo a_{in}) rispetto ad O

c) che O' abbia una velocita' iniziale di modulo pari a v_{in}

d) che tutte e due siano dirette lungo l'asse x $(x \equiv x')$ ⇨ $\vec{a}_{O'_{in}} = a_{in}\hat{i}$ e $\vec{\mathrm{v}}_{O'_{in}} = \mathrm{v}_{in}\hat{i}$

(attenzione alla notazione : e' l'opposto della notazione usata finora)

le formule di trasformazione in generale sono: $\vec{r}_{A_p} = \vec{r}_{R_p} + \vec{r}_{A_{O'}}$ $\quad \vec{\mathrm{v}}_{A_p} = \vec{\mathrm{v}}_{R_p} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{O'}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{R_p}$ $\quad \vec{a}_{A_p} = \vec{a}_{R_p} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}_{R_p} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_p}) + \vec{a}_{A_O} + 2\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{v}}_{R_p}$

in questo caso $\vec{\omega} = 0$ ⇨ $\dot{\vec{\omega}} = 0$ ⇨ $\vec{a}_C = 2\vec{\omega}\times\vec{\mathrm{v}}_{R_p} = 0$ e $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_{R_p}) = 0$ ma $\vec{a}_{A_{O'}} \neq 0$ quindi le formule di trasformazione diventano

$$\vec{r}_{A_P} = \vec{r}_{R_P} + \vec{r}_{A_{O'}} \qquad \vec{\mathrm{v}}_{A_P} = \vec{\mathrm{v}}_{R_P} + \vec{\mathrm{v}}_{A_{O'}} \qquad \vec{a}_{A_P} = \vec{a}_{R_P} + \vec{a}_{A_{O'}} \quad ⇨ \quad \vec{r}_{R_P} = \vec{r}_{A_P} - \vec{r}_{A_{O'}} \qquad \vec{\mathrm{v}}_{R_P} = \vec{\mathrm{v}}_{A_P} - \vec{\mathrm{v}}_{A_{O'}} \qquad \vec{a}_{R_P} = \vec{a}_{A_P} - \vec{a}_{A_{O'}}$$

proiettatando sugli assi cartesiani

$$x_{R_p}\hat{i}' = x_{A_p}\hat{i} - x_{A_{O'}}\hat{i} \qquad \mathrm{v}_{R_p x}\hat{i}' = \mathrm{v}_{A_p x}\hat{i} - \mathrm{v}_{A_{O'} x}\hat{i} \qquad a_{R_p x}\hat{i}' = a_{A_p x}\hat{i} - a_{A_{O'} x}\hat{i}$$

$$y_{R_p}\hat{j}' = y_{A_p}\hat{j} \qquad \mathrm{v}_{R_p y}\hat{j}' = \mathrm{v}_{A_p y}\hat{j} \qquad a_{R_p y}\hat{j}' = a_{A_p y}\hat{j}$$

$$z_{R_p}\hat{k}' = z_{A_p}\hat{k} \qquad \mathrm{v}_{R_p z}\hat{k}' = \mathrm{v}_{A_p z}\hat{k} \qquad a_{R_p z}\hat{k}' = a_{A_p z}\hat{k}$$

in questo caso gli assi sono paralleli → $\hat{i}' \equiv \hat{i}$ $\quad \hat{j}' \equiv \hat{j}$ $\quad \hat{k}' \equiv \hat{k}$ quindi le relazioni vettoriali si riducono alle semplici relazioni tra le componenti :

$$x_{R_P} = x_{A_P} - x_{A_{O'}} \qquad \mathrm{v}_{R_P x} = \mathrm{v}_{A_P x} - \mathrm{v}_{A_{O'} x} \qquad a_{R_P x} = a_{A_P x} - a_{A_{O'} x}$$

$$y_{R_P} = y_{A_P} \qquad \mathrm{v}_{R_P y} = \mathrm{v}_{A_P y} \qquad a_{R_P y} = a_{A_P y}$$

$$z_{R_P} = z_{A_P} \qquad \mathrm{v}_{R_P z} = \mathrm{v}_{A_P z} \qquad a_{R_P z} = a_{A_P z}$$

la posizione e la velocita' di O' rispetto ad O cambiano al trascorrere del tempo

in questo particolare caso gli andamenti di $x_{A_{O'}}$ e di $\mathrm{v}_{A_{O'}}$ in funzione del tempo sono $x_{A_{O'}} = \frac{1}{2}a_{in}t^2 + \mathrm{v}_{in}t$ e $\mathrm{v}_{A_{x_{O'}}} = a_{in}t + \mathrm{v}_{in}$

→ esplicitando la dipendenza dal tempo le <u>formule di trasformazione</u> diventano

$$x_{R_P} = x_{A_P} - \frac{1}{2} a_{in} t^2 - \mathrm{v}_{in} t \qquad \mathrm{v}_{R_{xP}} = \mathrm{v}_{A_{xP}} - \mathrm{v}_{in} - a_{in} t \qquad a_{R_{xP}} = a_{A_{xP}} - a_{in}$$

$$y_{R_P} = y_{A_P} \qquad \mathrm{v}_{R_{yP}} = \mathrm{v}_{A_{yP}} \qquad a_{R_{yP}} = a_{A_{yP}}$$

$$z_{R_P} = z_{A_P} \qquad \mathrm{v}_{R_{zP}} = \mathrm{v}_{A_{zP}} \qquad a_{R_{zP}} = a_{A_{zP}}$$

supponiamo che al tempo $t = 0$ cioe' quando le origini dei due sistemi coincidono l'osservatore solidale con il sistema O' in moto lasci cadere un corpo da un'altezza h

quale sara' la descrizione che gli osservatori solidali con i due sistemi daranno di questo fenomeno ?

secondo l'osservatore solidale con il sistema fermo O il punto materiale parte dall'altezza h con velocita' iniziale v_{in} e cade con l' accelerazione di gravita' $-g$

in O si ha

$$x_{A_P} = \mathrm{v}_{in} t \qquad \mathrm{v}_{A_{xP}} = \mathrm{v}_{in} \qquad a_{A_{xP}} = 0$$

$$y_{A_P} = 0 \qquad \mathrm{v}_{A_{yP}} = 0 \qquad a_{A_{yP}} = 0$$

$$z_{A_P} = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \mathrm{v}_{A_{zP}} = -g t \qquad a_{A_{zP}} = -g$$

→ la traiettoria e' una parabola nel piano x-z di equazione $z_{A_P} = -\frac{1}{2} x_{A_P}^2 \frac{g}{\mathrm{v}_{in}^2} + h$ il tempo di caduta e' $t_c = \sqrt{2\frac{h}{g}}$

lo spazio percorso lungo l'asse x e' $\Delta x_{A_P} = x_{A_P}(t_c) - x_{A_P}(0)$ ⇨ $\Delta x_{A_P} = \mathrm{v}_{in} t_c - 0 = \mathrm{v}_{in}\sqrt{2\frac{h}{g}}$

nello stesso tempo t_c il sistema di riferimento O' in moto accelerato e' avanzato della distanza $\Delta x_{O'} = \frac{1}{2} a_{in} t_c^2 + \mathrm{v}_{in} t_c$ quindi secondo l'osservatore solidale con il sistema fermo O

il corpo tocca l'asse delle x piu' indietro rispetto al punto di lancio della quantita' $\Delta x_{O'} - \Delta x = \frac{1}{2} a_{in} t_c^2 + \mathrm{v}_{in} t_c - \mathrm{v}_{in} t_c = \frac{1}{2} a_{in} t_c^2 = \frac{a_{in} h}{g}$

applicando le formule ricavate in precedenza si ha che l'osservatore in O' misurera'

$$x_{R_P} = \mathrm{v}_{in} t - \frac{1}{2} a_{in} t^2 - \mathrm{v}_{in} t = -\frac{1}{2} a_{in} t^2 \qquad \mathrm{v}_{R_{xP}} = \mathrm{v}_{in} - \mathrm{v}_{in} - a_{in} t = -a_{in} t \qquad a_{R_{xP}} = -a_{in}$$

$$y_{R_P} = 0 \qquad \mathrm{v}_{R_{yP}} = 0 \qquad a_{R_{yP}} = 0$$

$$z_{R_P} = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \mathrm{v}_{R_{zP}} = -g t \qquad a_{R_{zP}} = -g$$

in sintesi :

in O si ha

$$x_{A_P} = v_{in}t \qquad v_{A_{xP}} = v_{in} \qquad a_{A_{xP}} = 0$$
$$y_{A_P} = 0 \qquad v_{A_{yP}} = 0 \qquad a_{A_{yP}} = 0$$
$$z_{A_P} = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_{A_{zP}} = -gt \qquad a_{A_{zP}} = -g$$

in O' si ha

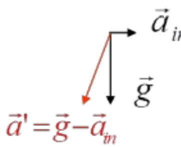
$$x_{R_P} = -\frac{1}{2}a_{in}t^2 \qquad v_{R_{xP}} = -a_{in}t \qquad a_{R_{xP}} = -a_{in}$$
$$y_{R_P} = 0 \qquad v_{R_{yP}} = 0 \qquad a_{R_{yP}} = 0$$
$$z_{R_P} = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_{R_{zP}} = -gt \qquad a_{R_{zP}} = -g$$

→ anche in O' l'accelerazione e' costante

ma e' diversa da g !

$$\vec{a}_{R_P} = \vec{a}_{A_P} - \vec{a}_{A_{O'}} \quad \rightarrow \quad \vec{a}_{R_P} = \vec{g} - \vec{a}_{in}$$

$$\vec{v}_{R_P} = \vec{v}_{A_P} - \vec{v}_{A_{O'}} = (-g\hat{k} - a_{in}\hat{i})t$$ e cio' significa che $$\vec{v}_{R_P} = \vec{a}_{R_P}t$$



ossia che la velocita' e' proporzionale all'accelerazione quindi nel piano $x'z'$ il moto e' rettilineo uniformemente accelerato con equazione $$x_{R_P} = \frac{a_{in}(z_{R_P} - h)}{g}$$

l'angolo formato con la verticale in O' e' $$tg\vartheta = \frac{a_{R_{XP}}}{a_{R_{ZP}}} = \frac{a_{in}}{g}$$ infine il punto tocca terra nel sistema O' nel punto $$x_{R_P} = -\frac{a_{in}h}{g}$$ esattamente come visto da O

in conclusione :

c'e' accordo tra cio' che constatano i due osservatori, **ma dal punto di vista dell'osservatore O' il corpo viene lasciato cadere sotto l'azione della sola forza peso e dovrebbe cadere lungo la verticale** per spiegare i risultati sperimentali l'osservatore in O' deve fare l'ipotesi che nel suo sistema di riferimento oltre alla forza peso sia presente una forza aggiuntiva uguale a $-ma_{in}$ la forza e' detta apparente perche' nel sistema O' *non esiste* una giustificazione sulla sua origine fisica

un filo a piombo in O' si disporrebbe lungo una verticale apparente a formare un angolo θ con la verticale inerziale mentre se il moto fosse rettilineo uniforme $\theta = 0$

quindi il filo a piombo si disporrebbe lungo la verticale inerziale dalla misura di quest'angolo si puo' risalire al valore di a_t e quindi in questo caso e' possibile capire se il proprio sistema sia in moto accelerato o meno → principio di funzionamento degli accelerometri

Backup Slides