## Rotazioni rigide attorno ad un *asse fisso nel tempo*

un corpo rigido vincolato ad avere due punti fissi nello spazio ossia un corpo rigido

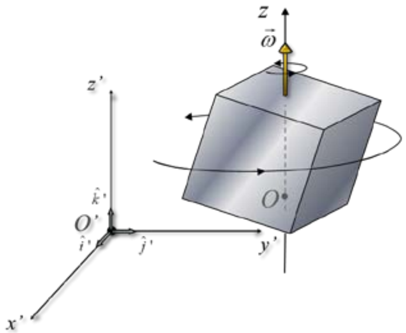
in rotazione attorno ad un asse fisso ha **un solo grado di liberta'**

rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $x'y'z'$ assumiamo che l' asse

di rotazione di un corpo rigido coincida per es. con l'asse $z$ che per semplicita'

assumeremo essere parallelo all'asse $z'$

→ $\vec{\omega} = \omega\hat{k} \equiv \omega\hat{k}'$




per descrivere il moto occorrera' riferirsi

ad un "opportuno" polo fisso $O$

- se l'asse $z$ mantiene direzione e verso **fissi** nello spazio **tutti** i punti

  posti sull'asse di rotazione rimarranno fermi al passar del tempo

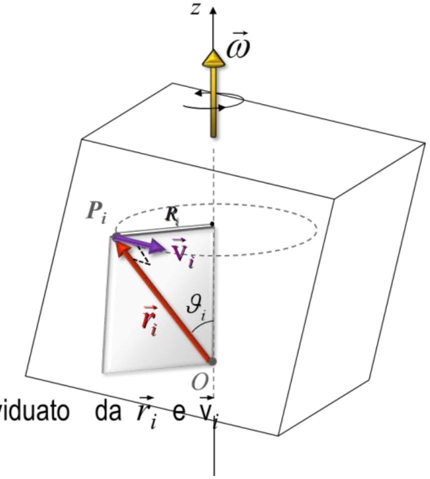
→ si potra' scegliere come polo $O$ un *qualunque* punto posto sull'asse $z$

il vettore posizione $\vec{r}_i$ di un generico punto $P_i$ rispetto al polo $O$ forma un

angolo $\theta_i$ con l'asse $z$ e un angolo di 90° con la velocita' $\vec{v}_i$ dell' $i$-esimo punto

- il momento angolare dell' $i$-esimo punto

  rispetto al polo $O$ e'



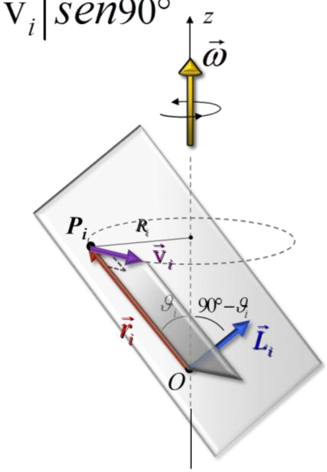

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

il vettore $\vec{L}_i$ e' perpendicolare al piano individuato da $\vec{r}_i$ e $\vec{v}_i$

ed e' posto ad un angolo di $(90^\circ - \theta_i)$ gradi rispetto all'asse $z$

il modulo di $\vec{L}_i$ e' $\left|\vec{L}_i\right| = L_i = \left|\vec{r}_i\right|\left|m_i\vec{v}_i\right| sen90^\circ$

$$= r_i m_i \left|\vec{v}_i\right| sen90^\circ = r_i m_i \left|\vec{v}_i\right|$$

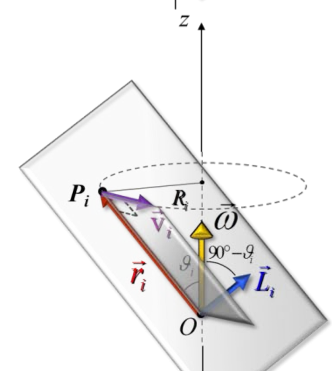



ma $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

e $\left|\vec{v}_i\right| = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right| = \omega r_i sen\vartheta_i$

⇨ $r_i m_i \left|\vec{v}_i\right| = r_i m_i \omega r_i sen\vartheta_i$

e dato che $R_i = r_i sen\vartheta_i$ si ha

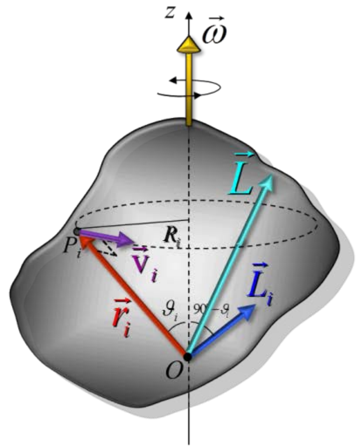



$$\left|\vec{L}_i\right| = L_i = r_i m_i R_i \omega$$

## Momento angolare **totale**

il momento angolare – **totale** – del corpo rigido sara'

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$




Nota bene: in generale $\vec{L}$ **non sara' parallelo**

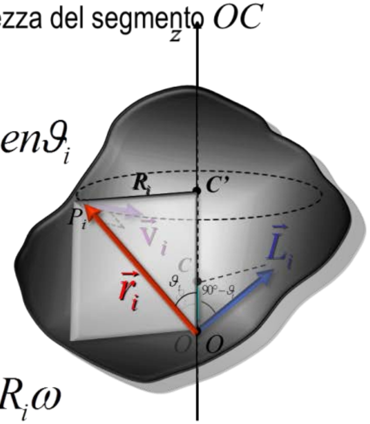
all'asse di rotazione e, salvo casi particolari,

- ***non*** **-** esistera' una proporzionalita'

diretta tra i **vettori** $\vec{L}$ ed $\vec{\omega}$

- la proiezione del momento angolare dell' i-esimo punto sull'asse di rotazione ,

  ( il momento angolare assiale ) e' pari alla lunghezza del segmento $OC$




e risulta $\quad L_{z_i} = L_i \cos(\frac{\pi}{2} - \vartheta_i) = L_i sen\vartheta_i$

si aveva $\quad \left|\vec{L}_i\right| = r_i m_i R_i \omega$

⇨ $L_{z_i} = r_i m_i R_i \omega sen\vartheta_i = \left(r_i sen\vartheta_i\right) m_i R_i \omega$

ma $\left(r_i sen\vartheta_i\right) = P_i C' = R_i \quad$ ⇨ $\quad L_{z_i} = m_i R_i^2 \omega$

dunque il momento angolare **assiale totale**, sara'

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{z_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = I_z \omega$$

dove si e' posto $\quad I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$

$I_z$ e' il **momento d'inerzia** del corpo rigido rispetto all'asse $z$

il momento d'inerzia, dipende solamente dalla forma del corpo e

dalla posizione dell'asse di rotazione rispetto al corpo

in generale si ha che

- il vettore momento angolare **totale** di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse fisso **- non -** e' parallelo all'asse di rotazione e non e' fisso nello spazio ma in generale ha un moto di ***precessione*** intorno all'asse di rotazione

ma

- la componente del momento angolare totale rispetto all'asse di rotazione, ossia il momento angolare totale **assiale**, e' **sempre** proporzionale al modulo della velocita' angolare il momento angolare totale $\vec{L}$ del corpo rigido risultera' parallelo all'asse

del corpo rigido ( parallelo ad $\vec{\omega}$ ) quando :

- l'asse di rotazione e' un **asse di simmetria** del corpo rigido
- l'asse di rotazione coincide con un **asse principale d'inerzia** del corpo rigido

**nel caso <u>piu' semplice possibile</u>** in cui il momento angolare totale $\vec{L}$

sia parallelo alla velocita' angolare se si pone $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

si avrebbe $\vec{L} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + I_z\omega\hat{k}$

ossia $\vec{L} = I_z\vec{\omega}$ ⇨ $\left|\vec{L}\right| = L_z = I_z\omega$

per cui $$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I_z\vec{\omega})}{dt} = \frac{dI_z}{dt}\vec{\omega} + I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

se il momento d'inerzia fosse **costante** nel tempo la formula si ridurrebbe a

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_z\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z\vec{\alpha}$$

e dalla seconda equazione cardinale $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ si otterrebbe

$$\vec{M}^E = I_z\vec{\alpha} \quad \text{da cui} \quad \vec{\alpha} = \frac{\vec{M}^E}{I_z}$$

quindi conoscendo il momento risultante delle forze esterne si potrebbe

determinare l' accelerazione angolare del corpo rigido

da notare come la $\vec{M} = I_z\vec{\alpha}$ per il corpo rigido sia equivalente

alla $\vec{F} = m\vec{a}$ per un punto materiale e per questo motivo

$I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2$ e' detto **" momento d'inerzia "** del corpo rigido rispetto all'asse di rotazione $z$

con $R_i$ = distanza **<u>assiale</u>** del punto i-esimo ,ossia distanza dl punto i-esimo dall'asse di rotazione

se il corpo e' continuo si dovra' operare con la densita' di massa

# Backup Slides