Determinare la posizione del centro di massa di due masse puntiformi m_1 ed m_2 poste a distanza fissa a una dall'altra nel caso che sia 1) $m_1 = m_2$ 2) $m_1 = 3\,m_2$ 3) $m_1 = 1/3\,m_2$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \Rightarrow x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots m_n} \quad y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots m_n} \quad z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots m_n}$$

scelto l'asse x come riferimento $x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$ se collochiamo la massa m_1 nell'origine $\rightarrow$ $x_1 = 0$ e $x_2 = a$ $\Rightarrow$ $x_{CM} = \frac{m_2 a}{m_1 + m_2}$

1) $m_1 = m_2 \Rightarrow x_{CM} = \frac{1}{2} a$ 2) $m_1 = 3\,m_2 \Rightarrow x_{CM} = \frac{m_2 a}{3m_2 + m_2} = \frac{1}{4} a$ 3) $m_1 = 1/3\,m_2 \Rightarrow x_{CM} = \frac{m_2 a}{\frac{1}{3} m_2 + m_2} = \frac{3}{4} a$

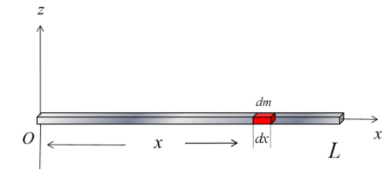
se le masse fossero distribuite con continuita' lungo linee, su superfici o entro volumi si introduce la " densita' di massa "

$\lambda_m = \frac{dm}{dl}$ densita' lineare di massa $\sigma_m = \frac{dm}{dS}$ densita' superficiale di massa $\rho_m = \frac{dm}{dV}$ densita' volumetrica di massa

se fosse nota la densita' di massa si ricaverebbe la massa integrando la densita' di massa stessa se $\lambda_m = \frac{dm}{dl} \Rightarrow dm = \lambda_m dl \Rightarrow m = \int_{linea} \lambda_m dl$

se $\sigma_m = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma_m dS \Rightarrow m = \int_{superfice} \sigma_m dS$ se $\rho_m = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho_m dV \Rightarrow m = \int_{volume} \rho_m dV$

Determinare la posizione del centro di massa di una sbarretta omogeneaa forma di parallelepipedo di massa M e lunghezza L assumendo che la superficie trasversa della sbarretta S sia costante ovunque e che la massa sia distribuita in modo uniforme entro il volume della sbarretta.



l'asticella e' omogenea → con densita' di massa costante uguale a $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{SL}$ dove S e' la superficie trasversa della sbarretta

il volume di un parallelepipedo di area di base S e altezza x e' $V = Sx$

per un parallelepipedo infinitesimo: $dV = Sdx$ e la massa infinitesima dm contenuta in un generico dV situato alla generica distanza x dall'origine

sara' $dm = \rho dV$ combinando la $\rho = \frac{M}{SL}$ con $dV = Sdx$ si ha $dm = \frac{M}{SL} Sdx \Rightarrow dm = \frac{M}{L} dx$

nel continuo la $x_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ diviene $x_{CM} = \frac{\int_0^L x dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L \frac{M}{L} x dx}{\int_0^L \frac{M}{L} dx} = \frac{\int_0^L x dx}{\int_0^L dx} = \frac{\frac{1}{2} x^2 \Big|_0^L}{x\Big|_0^L} = \frac{\frac{1}{2} L^2}{L} = \frac{1}{2} L$ → se la sbarretta e' omogenea $x_{CM} = \frac{1}{2} L$

Backup Slides