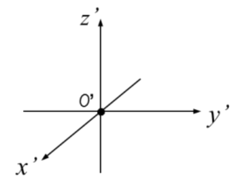
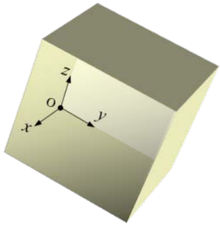
# Cinematica dei corpi rigidi

presa una terna cartesiana ortogonale $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ solidale con il corpo rigido e una terna di riferimento fissa nello *spazio* $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$




per la proprieta' di commutativita' del prodotto scalare e per le regole di derivazione del prodotto di due funzioni:

$$\frac{d(\vec{a}\cdot\vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt} \Rightarrow \frac{d(\hat{i}\cdot\hat{j})}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j} + \hat{i}\cdot\frac{d\hat{j}}{dt}$$

ma se i versori $\hat{i}$ e $\hat{j}$ sono perpendicolari tra loro $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0 \Rightarrow \frac{d(\hat{i}\cdot\hat{j})}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j} + \hat{i}\cdot\frac{d\hat{j}}{dt} = 0$ da cui

$$a)\quad \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j} = -\hat{i}\cdot\frac{d\hat{j}}{dt} \qquad b)\quad \frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{k} = -\hat{j}\cdot\frac{d\hat{k}}{dt} \qquad c)\quad \frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{i} = -\hat{k}\cdot\frac{d\hat{i}}{dt}$$

inoltre, dato che la derivata di un versore e' un vettore perpendicolare al versore iniziale, si ha :

$$d)\quad \hat{i}\cdot\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{i} = 0 \qquad e)\quad \hat{j}\cdot\frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt}\cdot\hat{j} = 0 \qquad f)\quad \hat{k}\cdot\frac{d\hat{k}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt}\cdot\hat{k} = 0$$

sia $\vec{v}$ un vettore qualsiasi, proiettandolo lungo la direzione di un qualsiasi versore $\hat{u}$ si ottiene la componente del vettore $\vec{v}$ lungo la direzione del versore $\hat{u}$ $\quad \vec{v}\cdot\hat{u}_n = v_n$

scomponendo $\vec{v}$ in componenti cartesiane si ha $\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}$ e dato che $v_x = \vec{v}\cdot\hat{i} \quad v_y = \vec{v}\cdot\hat{j} \quad v_z = \vec{v}\cdot\hat{k}$

si ha $\quad \vec{v} = (\vec{v}\cdot\hat{i})\hat{i} + (\vec{v}\cdot\hat{j})\hat{j} + (\vec{v}\cdot\hat{k})\hat{k}$

anche $\frac{d\hat{i}}{dt}$ e' un vettore percio' $\quad \frac{d\hat{i}}{dt} = (\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{i})\hat{i} + (\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j})\hat{j} + (\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{k})\hat{k}$

ma per la *d)* $\hat{i}\cdot\frac{d\hat{i}}{dt} = 0$ quindi $\frac{d\hat{i}}{dt} = (\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{j})\hat{j} + (\frac{d\hat{i}}{dt}\cdot\hat{k})\hat{k}$ mentre per le a) e c) le altre due componenti saranno diverse da zero ragionando in maniera uguale per le derivate dei versori $\hat{j}$ e $\hat{k}$ si ottiene

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = (\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j})\,\hat{j} + (\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{k})\hat{k} \qquad \frac{d\hat{j}}{dt} = (\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k})\hat{k} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = (\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{j})\,\hat{j}$$

per un generico vettore $\vec{\omega}$ $\quad \vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2\,\hat{j} + \omega_3 \hat{k}$ e se si pone: $\omega_1 = \frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k}$ $\quad \omega_2 = \frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i}$ $\quad \omega_3 = \frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j}$ si ottiene:

$\frac{d\hat{i}}{dt} = (\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j})\,\hat{j} + (\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{k})\hat{k} = \omega_3\,\hat{j} - \omega_2 \hat{k}$ e dato che per la *c)* $\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i} = -\hat{k} \cdot \frac{d\hat{i}}{dt} \equiv -\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{k}$ ⇨ $\frac{d\hat{i}}{dt} = \omega_3\,\hat{j} - \omega_2 \hat{k}$

$\frac{d\hat{j}}{dt} = (\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k})\hat{k} = -\omega_3 \hat{i} + \omega_1 \hat{k}$ e dato che per la *a)* $\frac{d\hat{i}}{dt} \cdot \hat{j} = -\hat{i} \cdot \frac{d\hat{j}}{dt} \equiv -\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{i}$ ⇨ $\frac{d\hat{j}}{dt} = -\omega_3 \hat{i} + \omega_1 \hat{k}$

$\frac{d\hat{k}}{dt} = (\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{i})\hat{i} + (\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{j})\,\hat{j} = \omega_2 \hat{i} - \omega_1\,\hat{j}$ e dato che per la *b)* $\frac{d\hat{j}}{dt} \cdot \hat{k} = -\hat{j} \cdot \frac{d\hat{k}}{dt} \equiv -\frac{d\hat{k}}{dt} \cdot \hat{j}$ ⇨ $\frac{d\hat{k}}{dt} = \omega_2 \hat{i} - \omega_1\,\hat{j}$

e dato che $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{i} + \omega_2\,\hat{j} + \omega_3 \hat{k}$ e $\hat{i} = 1 \cdot \hat{i} + 0 \cdot \hat{j} + 0 \cdot \hat{k}$ ⇨ $\vec{\omega} \times \hat{i} = (\omega_2 \cdot 0 - 0 \cdot \omega_3)\,\hat{i} + (\omega_3 \cdot 1 - \omega_1 \cdot 0)\,\hat{j} + (\omega_1 \cdot 0 - \omega_2 \cdot 1)\hat{k} = \omega_3\,\hat{j} - \omega_2 \hat{k}$

analogamente per i prodotti vettoriali di $\vec{\omega}$ con $\hat{j}$ e con $\hat{k}$

⇨ $\vec{\omega} \times \hat{i} = \omega_3\,\hat{j} - \omega_2 \hat{k}$ ⇨ $\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{i}$

⇨ $\vec{\omega} \times \hat{j} = -\omega_3 \hat{i} + \omega_1 \hat{k}$ ⇨ $\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{j}$ **formule di Poisson**

⇨ $\vec{\omega} \times \hat{k} = \omega_2 \hat{i} - \omega_1\,\hat{j}$ ⇨ $\frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}$

si dimostra che: dato un corpo rigido in movimento ed un versore $\hat{u}$ direzionato in modo qualsiasi nello spazio, ma solidale con il corpo rigido,

esiste sempre un vettore $\vec{\omega}$ tale che il prodotto vettoriale tra $\vec{\omega}$ ed $\hat{u}$ fornisce la derivata del versore $\hat{u}$ rispetto al tempo → $\dfrac{d\hat{u}}{dt} \equiv \vec{\omega} \times \hat{u}$

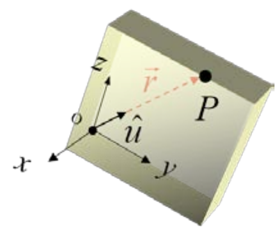
***(dimostrazione in aula)***

in conclusione :

$\vec{\omega}$ dipende soltanto da come si sta muovendo il corpo rigido quindi $\vec{\omega}$ e' un vettore caratteristico del corpo rigido e dato che dipende da quanto rapidamente

cambiano nel tempo i versori solidali al corpo rigido chiaramente e' legato ai movimenti di rotazione del corpo rigido attorno ad un asse

$\vec{\omega}$ e' detto vettore " velocita' angolare "




preso un qualunque punto $P$ del corpo rigido $\vec{r} = r\hat{u}$ dove $r$ e' la distanza, tra l'origine $O$ e il punto $P$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\hat{u} + r\dfrac{d\hat{u}}{dt}$ ma per via del vincolo di rigidita' $r$ e' fisso e $dr/dt = 0$ ⇨ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = r\dfrac{d\hat{u}}{dt}$

ma $\dfrac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$ ⇨ $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = r\vec{\omega} \times \hat{u} = \vec{\omega} \times r\hat{u}$ in conclusione : $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

in generale se anche il punto $O$ si sta spostando nello spazio con velocita' $\vec{v}_O$ la velocita' del generico punto $P$ del corpo rigido e' data da: $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$

# Backup Slides