Variabili aleatorie ➢ una *variabile aleatoria* (v.a.) e' una applicazione che associa un numero reale $\in [0,1]$ ad ogni risultato dello spazio degli eventi

in generale ➢ ogni esperimento aleatorio e' caratterizzabile tramite una ***variabile aleatoria*** discreta o continua

Variabili aleatorie discrete: una v.a. *discreta* k e' rappresentata da una tabella e/o da una formula matematica, che specifica

- ➢ il valore numerico assunto dalla v.a. discreta
- ➢ la probabilita' associata ad ogni valore numerico assunto dalla v.a.

→ Variabile aleatoria k associata al lancio di un dado

Tabella di definizione della v. a. k

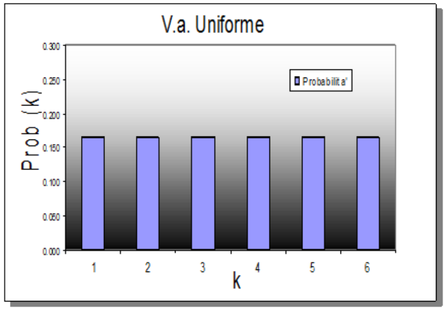
k	$P(k)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

Definizione matematica della v. a. **k**

$$P(k) = \frac{1}{6} \qquad \text{per} \quad k = 1, 2, \ldots 6$$

un modo grafico di rappresentare una v.a. discreta e' l' **istogramma**

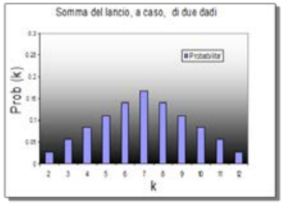
in un istogramma si graficano in successivi intervalli (bins) le probabilita'(le ***frequenze relative***)



Attenzione: la variabile k (x nel continuo) non e' semplicemente un numero attenzione a non confondere il concetto di "a caso" con l'idea di distribuzione uniforme

es. : probabilita' della somma dei risultati nel lancio simultaneo di due dadi

il lancio di due dadi e' "a caso", ma la somma dei risultati ottenuti *non* e' distribuita in modo uniforme



Valor medio e Varianza di una v.a. discreta

per caratterizzare una v.a. in modo sintetico, ma necessariamente approssimativo, si fa uso di indicatori di centralita' e di dispersione

i principali indicatori sono

- *indice di centralita' della v.a.* ➢ *valor medio* ($< k >$ o μ)
- *indice della dispersione della v.a. attorno al valor medio* ➢ deviazione standard ($r.m.s.$ o σ) $\sigma = \sqrt{(varianza)}$

Valor medio di una v.a. discreta

per v.a. discrete k con dominio di definizione $k \in [0, n]$ (assumono una quantita' finita di valori) e/o con $k \in [0, \infty]$ (possono assumere una infinita' numerabile di valori)

$$< k > \equiv \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)} \equiv \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(k_i)$$

dato che per l'assioma di normalizzazione $\sum_{i=1}^{n} P(k_i) = 1$

Varianza e deviazione standard di una v.a. discreta

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (k_i - <k>)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)} \equiv \sum_{i=1}^{n} (k_i - <k>)^2 \cdot P(k_i)$$

Deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (k_i - <k>)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(k_i)}} \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (k_i - <k>)^2 \cdot P(k_i)}$$

se la v.a. k non fosse estesa a tutto il suo dominio di definizione, , ma fosse limitata ad assumere valori compresi tra $k = n_1$ e $k = n_2$

$$<k>' = \frac{\sum_{i=n_1}^{n_2} k_i \cdot P(k_i)}{\sum_{i=n_1}^{n_2} P(k_i)} \qquad \sigma'^2 = \frac{\sum_{i=n_1}^{n_2} (k_i - \mu)^2 \cdot P(k_i)}{\sum_{i=n_1}^{n_2} P(k_i)}$$

etc.

alcune tra le principali distribuzioni discrete sono :

v.a. Bernoulliana o binomiale

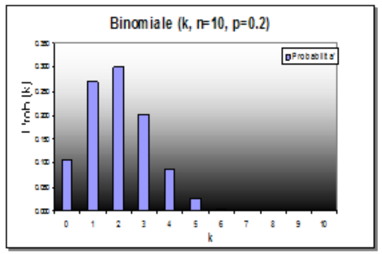
$$P_n(k) = \mathrm{Prob}(\ k\ successi\ in\ n\ prove\ ) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

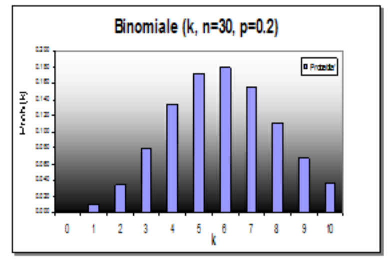
$n \in [1, +\infty]$ $\qquad k \in [0, +\infty]$ $\qquad q = 1 - p$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ ad es. $4! \ = 4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) \ = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$\boldsymbol{< k > = np} \qquad \boldsymbol{var = npq}$



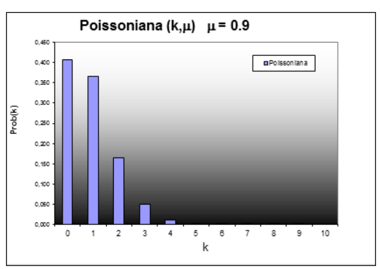


v.a. di Poisson (eventi rari)

$$P_\mu(k) = \mathrm{Prob}(\ k\ successi\ quando\ in\ media\ se\ ne\ hanno\ \mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$k \in [0, +\infty]$

$\boldsymbol{< k > = \mu} \qquad \boldsymbol{var = \mu}$

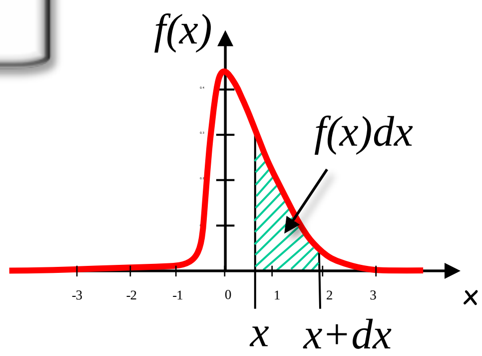


Variabili aleatorie (v.a.) continue

una v.a. *continua* X che possa assumere valori numerici x , con $x \in \mathbb{R}$ e' rappresentata da un funzione continua e derivabile

$f(x)$ definita in modo che

$$\boxed{f(x)\, dx = Prob\{\text{ che la v.a. } X \text{ assuma valori } \in [x,\ x+dx]\ \}}$$



il grafico della $f(x)$ puo' essere pensato come un istogramma di binnaggio infinitesimo

per v.a. continue X che hanno dominio di definizione $x \in [-\infty, +\infty]$

$$< x > \ \equiv \mu = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

dato che per l'assioma di normalizzazione $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

analogamente

$$\sigma^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx}$$

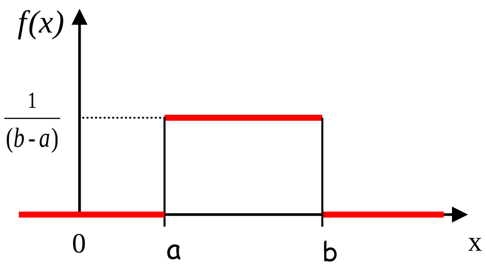
se la v.a. X non fosse estesa a tutto il suo dominio di definizione, ma fosse limitata ad assumere valori compresi tra $X = x_1$ e $X = x_2$

$$\mu' = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx} \qquad \sigma'^2 = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (x-\mu)^2 f(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx} \qquad \sigma' = \sqrt{\frac{\int_{x_1}^{x_2} (x-\mu)^2 f(x) dx}{\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx}}$$

alcune tra le principali v.a. continue sono :

v.a. <u>uniforme</u> una v.a. uniforme (distribuzione casuale) nell'intervallo [a,b] assume un valore costante in [a,b]

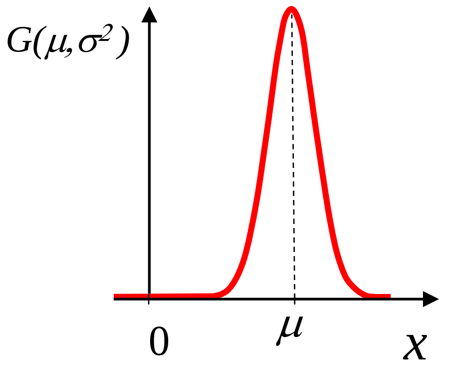
$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \quad per\ x \in [a,b] \qquad f(x) = 0 \quad \textit{altrove}$$



$$<x> = \frac{(b+a)}{2} \qquad var = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad (r.m.s.) = \sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

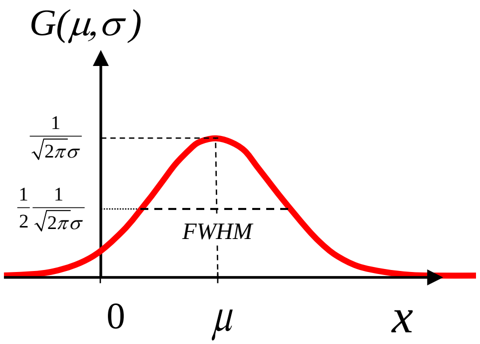
v.a. <u>Gaussiana</u> $G(\mu,\sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad per\ x \in [-\infty, +\infty]$$



$$<x> = \mu \qquad var = \sigma^2 \qquad (r.m.s.) = \sigma$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$



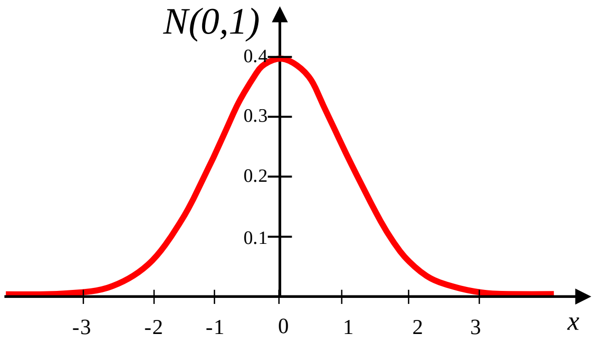
FWHM = larghezza a meta' altezza

$$FWHM = 2\sqrt{2\ln 2}\ \sigma \simeq 2.36\ \sigma$$

Gaussiana Standard o Normale $N(0,1)$

se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$

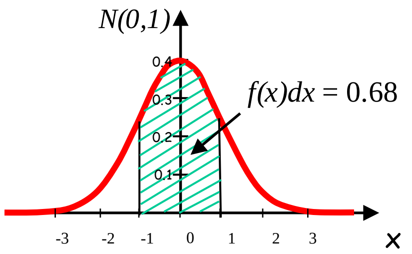
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad per\ x \in [-\infty, +\infty]$$



per una gaussiana si ha che

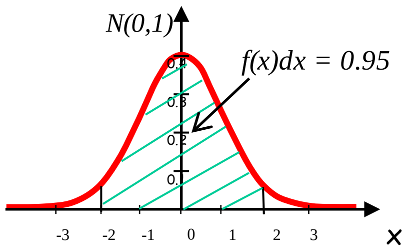
- il 68% della probabilita' (dell' area sotto la curva) e' compresa tra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$

  tra -1 e $+1$ per una Normale(0,1)



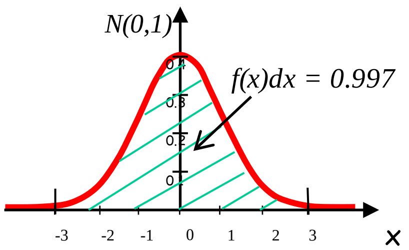
- il 95% della probabilita' (dell' area sotto la curva) e' compresa tra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$

  tra -2 e $+2$ per una Normale(0,1)



- il 99.7% della probabilita' (dell' area sotto la curva) e' compresa tra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$

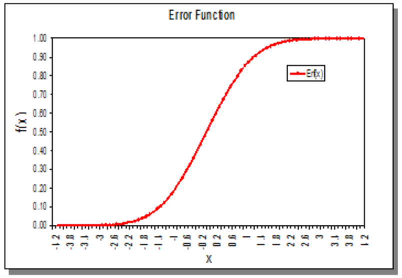
  tra -3 e $+3$ per una Normale(0,1)



Funzione degli errori

la funzione definita come l'area da $-\infty$ ad un generico punto z di una gaussiana standard e' detta "funzione degli errori" ("error function" in inglese))

$$erf(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$



➢ altre importanti densita' di probabilita' sono la **Chi Quadrato** e la **t di Student**

importanza della gaussiana : **teorema del limite centrale**

Backup slides