Lavoro meccanico

una forza $\vec{F}$ in generale variabile compie ***lavoro meccanico*** se sposta il suo ***punto di applicazione*** nello spazio

se $\vec{dl}$ e' lo spostamento infinitesimo del punto di applicazione della forza si definisce *lavoro infinitesimo* effettuato dalla forza $dL = \vec{F} \cdot \vec{dl}$

se lo spostamento e' finito e avviene da A a B lungo un determinato percorso Γ si dovra' calcolare il lavoro infinitesimo punto per punto del percorso

e sommare i lavori infinitesimi quindi, in termini matematici, il lavoro e' l' *integrale di linea* della forza lungo il percorso Γ $L(A \to B \text{ lungo la linea } \Gamma) = \int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dl}$

se la linea e' chiusa si parla di **circuitazione** $L(A \to B \text{ lungo un percorso chiuso}) = \oint \vec{F} \cdot \vec{dl}$

- *il lavoro meccanico e' una quantita' scalare*
- *per compiere lavoro meccanico una forza deve spostare il suo punto di applicazione oppure essere nella situazione di un corpo che si muova in presenza di un campo di forze*
- *per compiere lavoro una forza deve avere una componente non nulla nella direzione dello spostamento del suo punto di applicazione*
- *il lavoro meccanico non e' collegato al concetto di sforzo e fatica muscolari*

Teorema dell'energia (o delle "forze vive")

qualunque sia il percorso Γ → $L_{A\to B} = \int_{A \atop \text{lungo } \Gamma}^{B} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2$

dimostrazione: $\vec{F} \cdot \vec{dl} = m\vec{a} \cdot \vec{dl} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \vec{dl} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathrm{v}}dt$ in coordinate cartesiane, si ha $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

derivando ambo i membri rispetto al tempo: $\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d}{dt}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \frac{da_x}{dt}b_x + \frac{da_y}{dt}b_y + \frac{da_z}{dt}b_z + \frac{db_x}{dt}a_x + \frac{db_y}{dt}a_y + \frac{db_z}{dt}a_z$

$\frac{d(\vec{a} \cdot \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt} \cdot \vec{a}$ se $\vec{a} = \vec{b} \equiv \vec{\mathrm{v}}$ → $\frac{d(\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}})}{dt} = 2\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathrm{v}}$ ⇨ $\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\frac{d(\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}})}{dt}$

quindi $\vec{F} \cdot \vec{dl} = m\vec{a} \cdot \vec{dl} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot \vec{\mathrm{v}}dt = \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}})}{dt}dt$ ma $\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}} = |\vec{\mathrm{v}}|^2 \equiv \mathrm{v}^2$ dunque $\vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2}m\frac{d(\vec{\mathrm{v}} \cdot \vec{\mathrm{v}})}{dt}dt = \frac{1}{2}md(\mathrm{v}^2)$

$L(A \to B) = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2}m\int_A^B d(\mathrm{v}^2) = \frac{1}{2}m\mathrm{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathrm{v}_A^2$ posto $E_C = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2$ si ha $L_{A\to B} = E_{C_B} - E_{C_A}$

E_c e' detta **lenergia cinetica** unita' di misura della energia nel S.I. e' il Joule

Definizioni di conservativita' di un un campo *di forze*

un campo *di forze* e' conservativo

1) se il lavoro calcolato lungo un *percorso qualsiasi* non dipende dal percorso, ma solo dagli estremi di partenza e di arrivo

2) se il lavoro calcolato lungo un percorso chiuso e' nullo

3) se esiste una funzione scalare della posizione nello spazio, ossia una $E_P(x,y,z,t)$ tale per cui il lavoro tra due punti P_1 e P_2 dello spazio calcolato lungo un percorso qualsiasi e' uguale sempre e soltanto alla differenza che la funzione E_P assume nei punti P_1 e P_2 rispettivamente ovvero $L_{P_1\to P_2} = -\Delta E = -(E_P(P_2) - E_P(P_1)) \equiv E_P(P_1) - E_P(P_2)$

4) se il rotore del campo di forze e' nullo

in conclusione **se, e solo se,** le forze in gioco sono conservative il lavoro puo' essere scritto come : $L_{A\to B} = -\Delta E_P = E_{P_A} - E_{P_B}$

ricordiamo che dato un campo *scalare* $V(x,y,z,t)$ e' *sempre* possibile ricavarne un campo *vettoriale* attraverso l'operatore gradiente ma

dato un generico campo vettoriale $\vec{w}(x,y,z,t)$ *non sempre* e' possibile trovare

un campo scalare collegato a w tramite l'operatore gradiente i campi vettoriali ricavabili da un campo scalare attraverso l'operatore gradiente sono detti *conservativi*

in particolare se si tratta di un campo conservativo di *forze* alla funzione V si da' il nome di "*funzione potenziale*" mentre alla funzione

$U = -V$ e' dato il nome di "*energia potenziale*" spesso indicata come E_P

le forze conservative possono essere derivate da una funzione scalare $V(x,y,z,t)$ per mezzo della relazione $\vec{F} = \vec{\nabla} V$ ovvero $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

si ha $F_x = -\dfrac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial x}$ $F_y = -\dfrac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial y}$ $F_z = -\dfrac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial z}$

- **una forza conservativa è la conseguenza di una** *variazione nello spazio* **dell' energia potenziale** nel caso di un problema **unidimensionale** e in condizioni statiche o stazionarie

$V(x,y,z,t) = V(x) = -U(x)$ ⇨ moltiplicando ambo i membri per dx $F_x = -\dfrac{\partial U(x)}{\partial x} \equiv -\dfrac{dU(x)}{dx}$ ⇨ $F_x dx = -\dfrac{dU(x)}{dx} dx$

ma per definizione il differenziale di $U(x)$ e' $dU = \dfrac{dU(x)}{dx} dx$ per cui $F_x dx = -dU$ quindi $F_x dx = -dU$

integrando dal punto x_1 al punto x_2 $L_{x_1\to x_2} = -(U(x_2) - U(x_1))$ ⇨ $L = -\Delta U$

Energia meccanica

per il teorema delle forze vive si ha sempre $L_{A\to B} = E_C(B) - E_C(A)$ se le forze in gioco fossero conservative $L_{A\to B} = E_P(A) - E_P(B)$

dunque $L_{A\to B} = E_C(B) - E_C(A) = E_P(A) - E_P(B)$ ⇨ $E_C(A) + E_P(A) = E_C(B) + E_P(B) = \text{costante}$

in assenza di forze dissipative ossia se, e solo se, le forze in gioco sono conservative, esiste una grandezza scalare l' ***energia meccanica*** E_m che si mantiene costante durante il moto

dove $E_M = E_C + E_P$

l'energia meccanica e' la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale l'energia cinetica e quella potenziale possono cambiare nel tempo, ma

in assenza di forze non conservative (dissipative) la loro somma resta costante → l'energia si puo' trasformare da una forma ad un'altra, ma la somma rimane costante

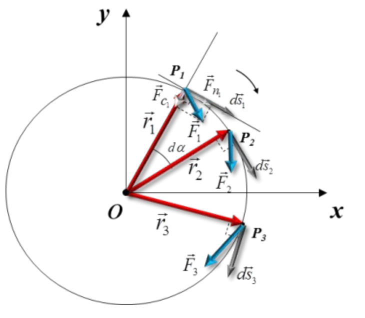
in presenza di forze *non* conservative (dissipative), quali sono ad es. le forze di attrito l'energia meccanica *non* e' piu' una costante del moto , dunque *non si conserva*

ma verra' dissipata sotto forma di calore attenzione : l'energia meccanica puo' anche essere ***negativa***

Potenza:

indica quanto rapidamente viene svolto il lavoro nel tempo $W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ unita' di misura della potenza nel S.I. e' il Watt

Espressione del lavoro nel moto circolare di un punto materiale in funzione del momento della forza applicata



$$\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_c \qquad dL = \vec{F}_n\cdot d\vec{s} + \cancel{\vec{F}_C\cdot d\vec{s}} = \vec{F}_n\cdot d\vec{s} = \left|\vec{F}_n\right|\cdot\left|d\vec{s}\right|\cos\vartheta = F_n ds$$

$$ds = r d\alpha \quad ⇨ \quad L_{AB} = \int_A^B \vec{F}_n\cdot d\vec{s} = \int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\left|\vec{F}_n\right| r d\alpha = \int_{\alpha_A}^{\alpha_B}\left|\vec{M}\right| d\alpha$$

Backup slides