Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

data una massa puntiforme m e una superficie Σ chiusa e finita detta "superficie gaussiana"

che <u>racchiuda</u> la massa m al suo interno il teorema di Gauss afferma che **<u>qualunque</u>**

sia la forma della superficie Σ si ha

$$\Phi_\Sigma(\vec{G}) = \oint_\Sigma d\Phi = \oint_\Sigma \vec{G}\cdot d\vec{S} = -4\pi\gamma m$$

se vi fossero piu' masse all'interno della superficie gaussiana $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -4\pi\gamma\sum_{i=1}^{n} m_i$

viceversa se la massa fosse **<u>esterna</u>** alla superficie gaussiana si avrebbe $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = 0$

<u>Nota bene</u>: la superficie gaussiana non e' una superficie reale ma e' una superficie fittizia definita da un equazione matematica

Caso Particolare:

superficie gaussiana sferica e concentrica alla massa

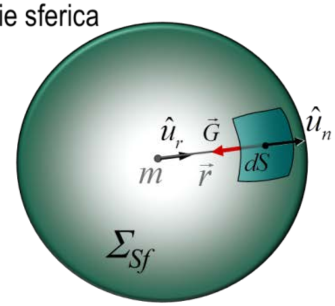
data una massa puntiforme m e una superficie **<u>sferica</u>** Σ_{Sf} di raggio r

<u>concentrica</u> alla massa m orientiamo la superficie sferica

positivamente verso l' **<u>esterno</u>**

e dividiamo la superficie della sfera in superfici

infinitesime orientate $d\vec{S} = dS\hat{u}_n$



il flusso infinitesimo $d\Phi$ del campo gravitazionale $\vec{G}$

sulla superficie infinitesima $d\vec{S}$ sara' $d\Phi = \vec{G}\cdot d\vec{S}$

$$d\Phi = -\gamma\frac{m}{r^2}\hat{u}_r\cdot d\vec{S} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = -\gamma\frac{m}{r^2}\hat{u}_r\cdot dS\hat{u}_n$$

ossia $d\Phi = -\gamma\frac{m}{r^2}dS(\hat{u}_r\cdot\hat{u}_n)$ ma $(\hat{u}_r\cdot\hat{u}_n) = 1\cdot 1\cdot cos(0) = 1$

dunque $d\Phi = -\gamma m\frac{dS}{r^2}$ per calcolare il flusso totale occorrera' integrare

sulla intera superficie sferica $\Phi_{\Sigma_{Sf}}(\vec{G}) = \oint_{\Sigma_{Sf}} d\Phi = \oint_{\Sigma_{Sf}} \vec{G}\cdot d\vec{S}$

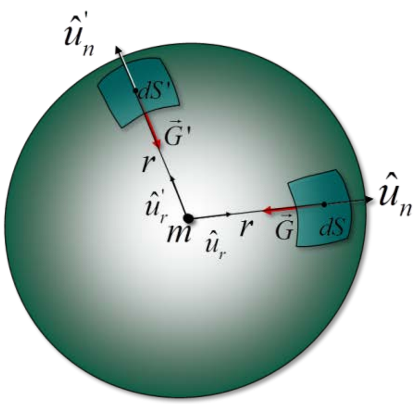
quando si sceglie una seconda qualsiasi superficie infinitesima dS'

i versori $\hat{u}_n'$ e $\hat{u}_r'$ rimarranno paralleli dato che la forza e' centrale

e punta sempre verso il centro

inoltre la distanza r rimarra' la stessa

dato che la sfera e' concentrica alla massa m



$$\Phi_{\Sigma_{Sf}}(\vec{G}) = -\gamma m\oint_{Sfera}\frac{dS}{r^2}$$

$$= -\frac{\gamma m}{r^2}\oint_{Sfera} dS = -4\pi\gamma m$$

in conclusione $\Phi_{\Sigma_{Sf}}(\vec{G}) = -4\pi\gamma m$

viceversa se la massa e' **<u>esterna</u>** alla superficie gaussiana si ha $\Phi_{\Sigma_{Sf}}(\vec{G}) = 0$

se vi fossero piu' masse all'interno della superficie sferica $\Phi_{\Sigma_{Sf}}(\vec{G}) = -4\pi\gamma\sum_{i=1}^{n} m_i$

Caso generale :

teorema di Gauss per una superficie Σ , chiusa e finita , di forma qualsiasi

1) se le masse puntiformi sono contenute all'interno della superficie gaussiana Σ

<u>QUALUNQUE</u> sia la forma della superficie si ha $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = -4\pi\gamma\sum_{i=1}^{n} m_i$

2) se la massa e' ***<u>esterna</u>*** alla superficie gaussiana Σ si ha $\Phi_\Sigma(\vec{G}) = 0$

(ossia il flusso risultera'nullo) <u>QUALUNQUE</u> sia la forma della superficie

dimostrazione in aula

Pozzi e sorgenti di un campo vettoriale

sono detti punti "sorgente" di un campo vettoriale quei punti dello spazio in cui

si intersecano **<u>infinite</u>** linee di flusso del campo vettoriale

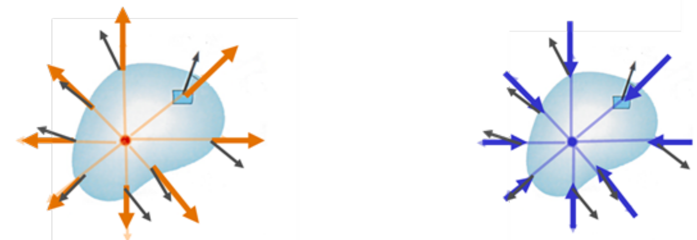
se da quel punto dello spazio le linee di flusso sono

- **uscenti** si parla di **sorgente** del campo
- **entranti** si parla di **pozzo** del campo

es. rubinetti e scarichi di una vasca da bagno

data la convenzione che una superficie chiusa sia sempre orientata positivamente verso l'esterno

→ **il flusso netto attraverso una superficie chiusa da' informazioni sulla presenza o meno di sorgenti del campo all'interno del volume racchiuso dalla superficie chiusa**



Significato fisico dell'operatore flusso

se il campo vettoriale è associato ad un moto d' insieme

il flusso attraverso una superficie ***<u>aperta</u>*** fornisce la quantità di grandezza fisica il cui moto e' descritto dal campo vettoriale,

che oltrepassa la superficie nell'unità di tempo (es. la portata di un fiume)

attenzione !!!

l'operatore flusso su di una superficie aperta o chiusa può essere usato anche per campi vettoriali <u>*statici*</u>, ossia campi in cui nulla si sta muovendo !

il significato del flusso se la superficie e' ***<u>chiusa</u>*** e' totalmente diverso:

se il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa e' nullo significa che non vi sono **sorgenti** (o **pozzi**) del campo vettoriale all'interno del volume delimitato dalla superficie chiusa

Significato fisico del teorema di Gauss

significato fisico dell'operatore flusso su di una superficie ***chiusa***

$\Downarrow$

segnala la presenza o meno di **sorgenti** del campo vettoriale all'interno della superficie

Teorema di Gauss per il campo gravitazionale

$\Downarrow$

$$\Phi(\vec{G}) = -4\pi\gamma m$$

se la massa si trova all'interno della supeficie

$$\Phi(\vec{G}) = 0$$

se la massa si trova all'esterno della supeficie

$\Downarrow$

le masse, e solo le masse, sono le **sorgenti** del campo gravitazionale

Backup Slides